



**Tesis Yeri Seçim Problemleri İçin Akış Tabanlı Modellerin ve Çözüm Metodolojilerinin
Geliştirilmesi**

Program Kodu: 1001

Proje No: 114M363

Proje Yürütücüsü:
Doç. Dr. İbrahim AKGÜN

Bursiyerler:

Betül KAYIŞOĞLU (Doktora Öğrencisi)

Abdulkerim BENLİ (Yüksek Lisans Öğrencisi - Mezun Oldu)

Betül Çoban (Yüksek Lisans Öğrencisi)

Recep Şahin (Yüksek Lisans Öğrencisi)

ARALIK 2017

KAYSERİ



ÖNSÖZ

Tesis yeri seçim problemleri, en az üç sebeple araştırmacıların yoğun ilgisini çekmektedir: (1) Problemler, büyük yatırımlar gerektiren, uzun dönemli kararlarla ilgilidir ve hem kamu hem de özel sektörde stratejik öneme sahiptir. (2) Problemler, metodolojik olarak zor problemlerdir. Genel bir serim üzerindeki problemlerin hemen hemen tamamı, NP-zordur. (3) Tesis yeri seçim modelleri, tesis yeri seçimi ile ilgili olmayan problemlerde de yaygın uygulama alanı bulmaktadır. Bunların bir sonucu olarak, tesis yeri seçimine ilişkin çok sayıda makale ve kitap yayınlanmıştır. Hatta, tesis yeri seçim problemleri için bazı dergiler ve topluluklar tarafından özel kodlar belirlenmiştir. Ancak, bazı araştırmacılar tarafından, tesis yeri seçim modellerinin gerçek hayat problemlerini temsil etme ve çözmedeki yeterliliği uzun süredir sorgulanmakta ve yeni modellerin geliştirilmesine ihtiyaç olduğu ifade edilmektedir. Proje kapsamında, söz konusu tespitten hareketle, p-ortanca ve p-hub ortanca problemleri esas alınarak, gerçek hayattaki uygulamaları daha gerçekçi temsil eden ve mevcut klasik modellerdeki bazı kısıtları ortadan kaldıran matematiksel modeller ve çözüm yöntemleri geliştirilmiştir.

TÜBİTAK tarafından desteklenen bu projede, doktora öğrencisi Betül Kayışoğlu ve yüksek lisans öğrencileri Abdülkerim Benli, Betül Çoban ve Recep Şahin çalışmıştır. Betül Kayışoğlu'nun proje kapsamındaki doktora tez çalışması devam etmektedir. Abdülkerim Benli, proje kapsamındaki yüksek lisans tezini tamamlayarak mezun olmuştur. Betül Çoban ve Recep Şahin, kısa süreli olarak projede yer aldıktan sonra ayrılmıştır.

Projede yapılan çalışmaların bazıları yurtiçi ve yurtdışındaki konferans ve çalıştaylarda sunulmuş, olumlu geribildirimler alınmıştır. Çalışmaların bir kısmını içeren makaleler SCI endeksli dergilerde değerlendirme aşamasındadır. Diğer bölümlere ilişkin makale hazırlıkları devam etmektedir.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	IV
TABLolar LİSTESİ.....	V
ÖZET.....	VI
ABSTRACT.....	VII
1. GİRİŞ.....	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ.....	4
3. GEREÇ VE YÖNTEM.....	15
3.1.Kapasitesiz p-Ortanca Problemi.....	16
3.2.Ayrıt Kapasiteli p-Ortanca Problemi.....	24
3.3.Düğüm Kapasiteli p-Ortanca Problemi.....	25
3.4.Karma Kapasiteli p-Ortanca Problemi.....	29
3.5.Kapasitesiz p-Hub Ortanca Problemi.....	30
3.6.Ayrıt Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi.....	39
3.7.Hub Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi.....	41
3.8.Karma Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi.....	42
3.9.Ağaç Yapılı p-Hub Ortanca Problemi.....	44
3.10. p-Hub Ortanca Kesme/Önleme Problemi.....	51
4. BULGULAR.....	57
4.1.Kapasitesiz p-Ortanca Problemi.....	58
4.2.Ayrıt Kapasiteli p-Ortanca Problemi.....	62
4.3.Düğüm Kapasiteli p-Ortanca Problemi.....	64
4.4.Karma Kapasiteli p-Ortanca Problemi.....	66
4.5.Kapasitesiz p-Hub Ortanca Problemi.....	67
4.6.Ayrıt Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi.....	68
4.7.Hub Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi.....	69
4.8.Karma Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi.....	70
4.9.Ağaç Yapılı p-Hub Ortanca Problemi.....	71
4.10. p-Hub Ortanca Kesme/Önleme Problemi.....	72
5. TARTIŞMA/SONUÇ.....	74
KAYNAKLAR.....	77

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Yıldız ağaçlar ve en kısa yol tabanlı çözümler.....	17
Şekil 2. Örnek bir serimin modelleme için modifiye edilmesi ve örnek bir arboresence.....	18
Şekil 3. Gerçek serim yapısı için örnek serim.....	32
Şekil 4. $E^* = (\{4,5\}, \{3,4\}, \{2,4\})$, $N^* = (2,3,4,5)$, $H = (3,4,5)$, ve $S=D = (1,2,3,4,5)$ olan GS'den elde edilen üç katmanlı MS serimi.....	34
Şekil 5. Engelleme olmayan normal serim çözümü.....	52
Şekil 6. Lei'nin (2013) çözüm yaklaşımı.....	53
Şekil 7. Proje kapsamında önerilen modelleme yaklaşımı ile örnek bir çözüm.....	54

TABLolar LİSTESİ

Tablo 1. p-Hub ortanca problemlerinin özellikleri.....	58
Tablo 2. ORL2 problemleri için hesaplama sonuçları (OUM: Bellek yetersiz).....	60
Tablo 3. ORL1 problemleri için hesaplama sonuçları.....	61
Tablo 4. ÇMATP-Benders Algoritmasının test sonuçları.....	62
Tablo 5. AKÇMATP ve AKÇMATP-Lagrange Algoritmasının hesaplama sonuçları.....	63
Tablo 6. DKÇMATP1 ve düğüm kapasiteli CF hesaplama sonuçları.....	64
Tablo 7. DKÇMATP1-Lagrange ve DKÇMATP2-Benders algoritmalarının hesaplama sonuçları.....	65
Tablo 8. KKÇMATP-Lagrange algoritmasının hesaplama sonuçları.....	66
Tablo 9. ÇMATHP ve R-ÇMATHP modellerine ilişkin hesaplama sonuçları.....	67
Tablo 10. Literatürdeki EK ve MCL modellerine ilişkin hesaplama sonuçları.....	67
Tablo 11. Sezgisel yöntem RFHEUR'e ilişkin hesaplama sonuçları.....	68
Tablo 12. AKÇMATHP modeli ve AKÇMATHP-Lagrange algoritmasının hesaplama sonuçları.....	69
Tablo 13. HKÇMATHP modeli ve HKÇMATHP-Lagrange algoritmasının hesaplama sonuçları.....	70
Tablo 14. KKÇMATHP modeli ve KKÇMATHP-Lagrange algoritmasının hesaplama sonuçları.....	70
Tablo 15. AYÇMATHP1 ve AYÇMATHP-Sezgisel algoritmasının hesaplama sonuçları.....	71
Tablo 16. AYÇMATHP1-Benders algoritmasının hesaplama sonuçları.....	72
Tablo 17. ÇMATHKM-Ayrıştırma algoritmasının CAB25 veri seti için hesaplama sonuçları.....	73
Tablo 18. ÇMATHKM-Ayrıştırma algoritmasının TR81 veri seti için hesaplama sonuçları.....	74

ÖZET

Tesis yeri seçim problemleri, yoğun olarak akademik çalışmaların yürütüldüğü alanlardan biridir. Ancak, bazı araştırmacılar tarafından, tesis yeri seçim modellerinin gerçek hayat uygulamalarını temsil etme ve çözümedeki yeterliliği uzun süredir sorgulanmakta ve yeni modellerin geliştirilmesine ihtiyaç olduğu ifade edilmektedir. Literatürdeki modellerin büyük bir çoğunluğu, modellerin gerçek hayattaki uygulama alanlarını sınırlandıran belirli varsayımlara dayanmaktadır. Bu varsayımların en önemlilerinden biri, modellerde girdi olarak kullanılan serim ve veri yapısıyla ilgilidir. Literatürdeki modeller, düğümler arası mesafe matrisinde en kısa yol uzunluklarının kullanıldığı tam serim (complete network) yapısı üzerine kuruludur. Modellerde tam serim yapısının kullanılması, gerçek hayattaki serimlerin (örneğin, demiryolları ya da karayolları) tam serim yapısında olmasından ziyade, araştırmacıların bazen doğrudan bazen de dolaylı olarak kabul ettiği bir varsayıma dayanmaktadır. Araştırmacılar, gerçek hayat serimlerine en kısa yol algoritmalarının uygulanması suretiyle, düğümler arasında en kısa yolların kullanıldığı bir tam serim yapısının oluşturulduğunu varsaymaktadır. Diğer bir ifadeyle, modellerde girdi olarak kullanılan serim yapısı, düğümler arası mesafelerin üçgen eşitsizliğini sağladığı tam serimdir. Bu yaklaşım genel olarak kabul görmekle beraber, gerçek serim ve veri yapısının modellerde doğrudan girdi olarak kullanılmaması, modelleme ve çözüm açısından bazı dezavantajlara sebep olmaktadır. Daha da önemlisi, gerçek hayatta en kısa yolların tercih edilmediği veya üçgen eşitsizliğinin sağlanmadığı birçok durum vardır. Söz konusu tespitlerden hareketle, literatürdeki yaklaşımlardan tamamen farklı olarak, tam olmayan gerçek serim yapısının modellerde doğrudan girdi olarak kullanıldığı tesis yeri seçim problemleri tanımlanmıştır. Projede, tesis yeri seçiminde klasikler arasında kabul edilmeleri ve diğer tesis yeri seçim modellerinin temelini oluşturmaları nedeniyle, p-ortanca ve p-hub ortanca problemleri ele alınmıştır. Bu problemlerin, ayırıt/düğüm kapasiteli, kapasitesiz, tek ve çoklu atama ile farklı topolojilere izin veren versiyonları için modeller ve çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Geliştirilen modeller, hem gerçek serim yapısı, hem de (üçgen eşitsizliğini sağlamayan dahil) tam serim yapısı ile doğru sonuçlar vermektedir. Geliştirilen formülasyonlarda, daha çok tesis-talep noktası atama kararlarına dayanan literatürdeki modellerin aksine, ayırıt tabanlı akışlar esas alınmıştır. Modellerin çözümü için, Benders Ayırıştırma ve Lagrange gevşetme algoritmaları geliştirilmiştir. Modellerin ve geliştirilen algoritmaların performansları, çeşitli problemler kullanılarak test edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: p-Ortanca Problemi, p-Hub Ortanca Problemi, Serim Akış-Tabanlı Modeller, Tesis Yeri Seçim Modelleri, Karışık Tamsayılı Programlama, Üçgen Eşitsizliği, Tam Olmayan Serimler



ABSTRACT

Facility location problems are one of the mostly-studied areas. However, some researchers have been questioning the applicability of the facility location models to solve real-world problems and stating that there is a need to develop new models to better model real-world problems for quite long time. Most models in the literature depend on several assumptions that limit their application areas in in real life. One of the most important assumptions is about the network and data structures used as an input in the models. The models in the literature are based on the complete network structure where the distance matrix represents the shortest-path distances between node pairs. This starting point is not necessarily from assuming that the underlying real-world network (e.g., physical network such as road and rail networks) on which the hub system will operate is complete. It is implicitly or explicitly assumed that a complete-network structure is constructed from the shortest-path lengths between origin-destination pairs on the underlying real-world network through a shortest-path algorithm. Thus, the network structure used as an input in most models is a complete network with the distances satisfying the triangle inequality. Even though this approach has gained acceptance, not using the real-world network and its data structure directly in the models may result in several computational and modeling disadvantages. More importantly, there are cases in which the shortest path is not preferred or the triangle inequality is not satisfied. In this regard, we take a new direction completely different from the literature and define the *facility location problems* directly on non-complete networks that are representative of many real- world networks. p -median and p -hub median problems have been addressed in the project as they are accepted among the classical facility location models and form the building blocks of many other facility location models. Arc/node capacitated, uncapacitated, single- and multi-assignment versions with general topologies (e.g., allowing tree structure between hubs) of these problems have been investigated. The models can be used for both real networks and complete networks (including the ones not satisfying the triangle inequality). Unlike most models in the literature that are based on facility-demand point assignments, the new formulations are based on arc-based flows. To solve the models, Benders decomposition and Lagrangean based algorithms have been developed. The performances of the proposed models and algorithms have been assessed using several test problems.

Keywords: p -Median Problem, p -Hub Median Problem, Network Flow-Based Models, Facility Location Models, Mixed Integer Programming, Triangle Inequality, Non-complete Networks

1. GİRİŞ

Tesis yeri seçim problemleri, en az üç sebeple araştırmacıların yoğun ilgisini çekmektedir. (1) Problemler, büyük yatırımlar gerektiren, uzun dönemli kararlarla ilgilidir ve hem kamu hem de özel sektörde stratejik öneme sahiptir. (2) Problemler, metodolojik olarak zor problemlerdir. Genel bir serim üzerindeki problemlerin hemen hemen tamamı, NP-zordur. (3) Tesis yeri seçim modelleri, tesis yeri seçimi ile ilgili olmayan problemlerde de (örneğin, ekonomi, bilgisayar bilimi, coğrafya) yaygın uygulama alanı bulmaktadır. Bunların bir sonucu olarak, tesis yeri seçimine ilişkin çok sayıda makale ve kitap yayınlanmıştır. Hatta, tesis yeri seçim problemleri için bazı dergiler ve topluluklar tarafından özel kodlar belirlenmiştir. Ancak, araştırmacılar tarafından geliştirilen tesis yeri seçim modellerinin gerçek hayat problemlerini çözmedeki yeterliliği ve kullanılabilirliği sürekli sorgulanmıştır (Melo, Nickel ve Gama, 2007).

Daskin ve Owen (2003), klasik tesis yeri seçim modellerine (örneğin, p-ortanca, kapsama ve p-merkez), maliyet dışındaki amaç fonksiyonları, stokastik girdiler ve dinamik kararlar ile serim yapısı, tesis yerleri ve ulaştırma kararları arasındaki etkileşimin dahil edilmesi gerekliliğini vurgulamıştır. Benzer şekilde, Campbell ve O'Kelly (2012) ve Contreras (2015), ana dağıtım üssü (hub) yer seçimi problemlerine ilişkin olarak, klasik modellerin daha ötesine geçilerek gerçek hayattaki ana dağıtım üssü sistemlerini daha iyi temsil eden yeni problemlerin tanımlanmasına ihtiyaç olduğunu ifade etmiştir. Campbell ve O'Kelly (2012), spesifik olarak, ideal durumları temsil eden çok büyük çaplı ana dağıtım üssü problemlerini çözmek yerine, farklı ulaştırma sistemlerinin (hava, kara ve su ulaştırma sistemleri gibi) daha iyi modellenmesine ve daha gerçekçi ulaştırma maliyetleri ile hizmet kalitesi ölçütlerinin modellere dahil edilmesine ihtiyaç olduğunu vurgulamıştır.

Bu projenin ana motivasyon kaynağı, farklı araştırmacılar tarafından da açıkça ortaya konan, tesis yeri seçim problemlerine ilişkin yeni modellere duyulan ihtiyaçtır. Çalışma ile, tesis yeri seçim problemlerinin gerçek hayat uygulamalarını sınırlandıran mevcut modellerdeki bazı varsayımların gevşetilmesini sağlayacak bir problem yapısı ve modelleme yaklaşımı geliştirilmiştir. Önerilen modelleme yaklaşımı, gerçek hayattaki ulaştırma sistemlerinin bazı özelliklerinin modellenmesinde esneklik ve gerçekçilik kazandırmıştır.

Proje kapsamında önerilen yaklaşımın temelini açıklamak üzere, ilk olarak farklı serim tipleri tanımlanacaktır: (1) Gerçek Serim (GS): Ulaştırma sisteminin üzerinde çalışacağı fiziksel serim (örneğin, karayolları ve demiryolları ağı). (2) Modellenen Serim (MS): Problem için geliştirilen modelde girdi olarak kullanılan serim. MS, GS'den farklı olabilir ancak ön işlem yoluyla GS'den elde edilebilir. (3) Çıktı Serimi (ÇS): Bir modelin çözümündeki akışlar ile ortaya çıkan serim yapısı. Örneğin, ana dağıtım üssü yer seçimi probleminde ÇS, hub düğümler, hub olmayan düğümler ve (pozitif akışlar tarafından belirlenen) kaynak-talep

düğüm çiftleri arasındaki hizmet rotalarından oluşur. ÇS, MS'in bir alt serimidir ve bu nedenle, yapısı MS tarafından belirlenir. Eğer GS ve MS birbirinden farklı ise, ÇS'nin GS üzerinde karşılık gelen yapısını bulmak üzere, ÇS üzerinde ilave işlemler yapılması gerekebilir.

Literatürdeki tesis yeri seçim modellerinin hemen hemen tamamında MS, ayrıt mesafeleri üçgen eşitsizliğini sağlayan bir tam serim olarak kabul edilmektedir (**Varsayım 1**). Bu varsayım, GS'nin her zaman tam serim yapısında olmasından ve üçgen eşitsizliği koşulunu sağlamasından kaynaklanmaz çünkü gerçek hayattaki birçok serim (örneğin, demiryolları), tam serim yapısında değildir. Bu durumlarda, araştırmacılar tarafından doğrudan veya dolaylı olarak, gerçek hayat serimlerine Floyd Algoritması (Floyd, 1962) gibi en kısa yol algoritmalarının uygulanması suretiyle, düğümler arasında en kısa yolların kullanıldığı bir tam serim yapısının oluşturulduğu (dolayısıyla, mesafelerin üçgen eşitsizliğini sağladığı) varsayılmaktadır. Ancak söz konusu yaklaşımın bazı dezavantajları ve olası sonuçları vardır:

- Tam serim yapısı elde etmek için gerekli olan ön işlemler, büyük çaplı serimler için çok maliyetli olabilir. Taillard (1996), 10000 düğümlü İsviçre karayolu serimini kullanarak p-ortanca problemi için yaptığı bir çalışmada, ön işlemlerin, çok iyi bir çözüm bulmaktan 100 kat daha fazla zaman aldığını rapor etmiştir.
- Tam serim yapısının kullanılması model boyutlarının çok çabuk büyümesine ve böylece çözümünün zorlaşmasına sebep olmaktadır. n düğümden oluşan bir tam serimde, ayrıt sayısı $n(n-1)/2$ iken, düzlemsel serimde bu sayı en fazla $3n-6$ 'dır (Nishizeki ve Chiba, 1988). Bu problemlere ilişkin yapılan literatürdeki birçok çalışma da, model boyutunun düşürülmesine yöneliktir (örneğin, Church, 2003).
- Tam serim kullanıldığında, GS üzerindeki rotalama bilgisini elde etmek için ÇS üzerinde ilave işlemler yapmak gerekebilir çünkü MS'deki bir ayrıt, GS'de tek bir ayrıta değil en kısa yol ayrıtına karşılık gelebilir.
- Tesis yerleri ile rotalama kararları arasındaki etkileşimin modellenmesi mümkün olmamakta ya da problemi daha da zorlaştıran kısıtların ilave edilmesi gerekmektedir. Örneğin, GS'de iki düğüm arasındaki bir yolun kullanılmaması durumu, mevcut modelleme yaklaşımları ile doğrudan modellenememektedir.
- Düğümler veya ayrıtlara kapasite eklenmesi gibi durumların modellenmesi mümkün olmamakta ya da kapasite yorumlarında büyük oranda basitleştirme yapılması gerekmektedir. Örneğin, literatürde bir problem olarak tanımlanmasına rağmen, "ayrıt kapasiteli p-ortanca problemi" için bir model bulunmamaktadır. Mevcut modelleme yaklaşımları ile bunu yapabilmek, ancak tüm ayrıtlara aynı kapasiteyi tahsis etmekle mümkündür. p-hub ortanca problemine ilişkin "ayrıt kapasiteli" bir çalışma mevcuttur;

ancak, söz konusu çalışma incelendiğinde, gerçek serim yapısının kullanılmadığı görülmektedir.

- Kabul edilen yaklaşımın kullanılmadığı bazı durumlar mevcuttur: (i) en kısa yolların kullanılmasının tercih edilmediği veya doğru olmadığı durumlar (örneğin, telekomünikasyon serimleri) ve (ii) üçgen eşitsizliğinin sağlanmasının gerçekçi olmadığı durumlar (örneğin, tren, uçak ve otobüs yolcu ücretleri).
- Maliyet modeli, maliyet faktörleri ve bunların etkilerinin, GS'nin farklı ayrıtları üzerinde farklılık gösterebileceği gerçeğini dikakte alamaz. Genellikle, birim mesafe başına bir birimlik akış için tüm ayrıtlarda geçerli olan standart bir ulaştırma maliyeti belirlenir. Ancak gerçek hayatta maliyetler, farklı faktörlere bağlı olarak değişiklik gösterirler. Örneğin, farklı hız limitleri, trafik yoğunluğu ve ücret tarifesi bulunan farklı tipteki yollarda, küçük ve büyük boyutlu araçlar için maliyetler farklıdır (örneğin, Transportation Research Board, 2013; Ricardo-AEA, 2014).
- GS'deki iki düğüm arasında, farklı maliyet ve hizmet seviyesine sahip birden fazla ayrıtlın olduğu durumlar modellenemez. Örneğin, İzmit Körfezi'nin bir tarafından diğer tarafına geçmek için üç alternatif mevcuttur: (i) Yaklaşık bir saat süre ve 100 TL maliyetle feribotu kullanmak, (ii) 2 saat süre ve 40 TL maliyetle körfezin etrafından dolaşmak ve (iii) 4-6 dakia süre ve 120 TL maliyetle ücretli köprüyü kullanmak. Böyle bir durum, mevcut modelleme yaklaşımları ile modellenemez.
- Hizmet seviyesi ve serim topolojisi ile ilgili bazı tanımlar, bazı durumlarda belirsiz olabilir. Örneğin, karayolu ulaştırma seriminde iki nokta arasındaki bir rota üzerinde maksimum ayrıtlar sayısına ilişkin bir kısıt olduğunda, mevcut yaklaşımda GS'deki gerçek ayrıtlar sayısı değil MS'deki en kısa yol ayrıtları dikkate alınır.

Yukarıda açıklanan hususlar, Varsayım 1'in modellerde başlangıç noktası olarak alınmasının, doğrudan ve dolaylı olarak çeşitli dezavantajları olduğunu ortaya koymaktadır. Bazı araştırmacılar tarafından ortaya konan eleştirilerin bir kısmı da, Varsayım 1'e dayanmaktadır. Bu kapsamda, projede, Varsayım 1'in gevşetilmesi ve MS'de doğrudan GS yapısı ile verisinin kullanılmasını sağlayacak bir problem altyapısı ve modelleme yaklaşımı ortaya konmuştur.

Çalışma kapsamında, tesis yeri seçiminde klasikler arasında kabul edilmeleri ve diğer tesis yeri seçim modellerinin temelini oluşturmaları nedeniyle, *p-ortanca* ve *p-hub ortanca* problemleri ele alınmıştır. Bu problemlerin aşağıdaki versiyonları için matematiksel modeller ve çözüm yöntemleri geliştirilmiştir:

- Kapasitesiz *p*-Ortanca Problemi
- Ayrıtlar Kapasiteli *p*-Ortanca Problemi
- Düğüm Kapasiteli *p*-Ortanca Problemi



- Karma (Ayrıt/Düğüm) Kapasiteli p-Ortanca Problemi
- Kapasitesiz p-Hub Ortanca Problemi
- Ayrıt Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi
- Düğüm Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi
- Karma (Ayrıt/Düğüm) Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi
- Ağaç Yapılı p-Hub Ortanca Problemi
- p-Hub Ortanca Kesme/Önleme Problemi

Anılan problemler, doğrudan tam olmayan gerçek serimler üzerinde tanımlanmıştır. Bu yaklaşım, literatürde ilk kez, belirli maliyet ve serim yapısı gerektirmeyen matematiksel modeller geliştirmemizi sağlamıştır. Literatürdeki tüm modeller, MS olarak tam serim yapısını kullanmaktadır. Marin vd. (2006) tarafından ana dağıtım üssü yerleşim problemleri için geliştirilen bazı modeller dışında, maliyetlerin üçgen eşitsizliğini sağlamadığı durumlarda kullanılabilen modeller de literatürde yer almamaktadır. Marin vd. (2006), klasik ana dağıtım üssü yerleşim modellerine bazı kısıtlar ekleyerek üçgen eşitsizliğinin sağlanmadığı durumlarda kullanılabilmelerini sağlamıştır ancak geliştirilen modeller, ilerleyen bölümlerde ele alınacak olan ve sık sık eleştirilen bazı varsayımlara dayanmaktadır.

Sonuç olarak, projede geliştirilen modellerin tamamı, özgün modellerdir ve hem gerçek serim yapısı, hem de (üçgen eşitsizliğini sağlamayan dahil) tam serim yapısı ile doğru sonuçlar vermektedir. Diğer yandan, geliştirilen formülasyonlarda, daha çok tesis-talep noktası atama kararlarına dayanan literatürdeki modellerin aksine, ayrıt tabanlı akışlar esas alınmıştır. Bu yaklaşım, modellerin çözümünde Benders Ayrıştırma ve Lagrange gevşetme algoritmalarının uygulanmasına olanak sağlamıştır. Modellerin ve geliştirilen algoritmaların performansları, çeşitli problemler kullanılarak test edilmiştir. Hesaplama testleri, modellerin tam olmayan serim yapısı üzerinde tanımlanmasının, gerçek hayat sistemlerinin modellenmesinde sağladığı esneklik yanında, çözüm açısından da çeşitli avantajları olduğunu göstermiştir.

Projede elde edilen sonuçlar bir bütün olarak ele alındığında, literatüre önemli bir katkı yapıldığı, geliştirilen modellerin ve çözüm yöntemlerinin özgün olduğu, modeller ve çözüm yöntemlerini esas alan akademik yayınların öncü niteliği taşıdığı ve yaygın etki potansiyelinin yüksek olduğu değerlendirilmektedir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Gerek p-ortanca gerekse p-hub ortanca problemine ilişkin literatür çok geniştir. Projenin hedefi yeni modellerin ve çözüm metodolojilerinin geliştirilmesi olduğu için, p-ortanca ve p-hub ortanca problemlerine ilişkin modeller üzerinde durulacak ve projede önerilen yaklaşımın katkısı ortaya konacaktır.

Problemlere ilişkin detaylı literatür özetinde görüleceği üzere, bir tek formülasyon çok sayıda çalışmayı tetikleyebilmektedir. Örneğin, p-ortanca problemine ilişkin klasik formülasyonu (ReVelle ve Swain, 1970) doğrudan esas alan 100 civarında çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmaların büyük çoğunluğu, daha büyük çaplı problemlerin çözülebilmesi için, söz konusu modelin boyutunun düşürülmesi ile tam ve (meta)sezgisel yöntemlerin geliştirilmesine yöneliktir. Daha iyi modellere ihtiyaç olduğu farklı araştırmacılar tarafından ifade edilmesine rağmen, p-ortanca problemi için geliştirilen sadece 5 adet farklı model vardır. p-hub ortanca problemi için de benzer bir durum söz konusudur. Bu da, yeni modelleme yaklaşımları ve çözüm yöntemlerine olan ihtiyacı göstermektedir.

2.1. Kapasitesiz p-ortanca Problemi

p-ortanca problemi, bir serimin düğümlerinde ortaya çıkan talebi karşılamak için, p adet tesisin, maliyeti enküçükleyecek şekilde, serim üzerindeki yerlerinin belirlenmesi problemidir. p-ortanca probleminde maliyet, talep noktaları ile talep noktalarına en yakın tesisler arasındaki mesafelerin talep ağırlıklı toplamı olarak ifade edilir. p-ortanca probleminin farklı uygulama alanları, Vinod (1969), Mulvey ve Crowder (1979), Hansen ve Jaumard (1997), Bradley ve Mangasarian (1998), Fung ve Mangasarian (2001) ve Briant ve Naddef (2004)'in çalışmalarında bulunabilir.

p-ortanca problemi için ilk formülasyon, Hakimi (1964) tarafından geliştirilmiştir. Hakimi, serimin düğümlerine ve ayrıt içindeki herhangi bir noktaya tesislerin yerleştirilmesine izin vermiştir. Hakimi (1964, 1965), düğüm kümesinin p-elemanlı bir alt kümesinin, problemi optimal olarak çözdüğünü ispatlamıştır. p-ortanca problemi, düğüm derecesi en fazla 3 olan düzlemsel serimlerde bile NP-zordur (Kariv ve Hakimi, 1979). Ağaç serimlerinde, düşük seviyeli polinom zamanlı algoritmalarla problem çözülebilir (Kariv and Hakimi, 1979; Tamir, 1996; Benkoczi and Battacharya, 2005).

ReVelle ve Swain (1970)'in Klasik Formülasyonu:

p-ortanca probleminin ilk tamsayı programlama modeli, ReVelle ve Swain (1970) tarafından geliştirilmiştir. Bu formülasyon, Balinski (1961, 1965)'nin Temel Fabrika Yerleşim Problemi (Uncapacitated Facility Location Problem: UFLP) formülasyonunun bir modifikasyonudur ve amaç fonksiyonundan tesis açılması ile ilgili sabit maliyetlerin silinmesi ve açılacak tesis sayısını p'ye eşitleyen bir kısıtın ilave edilmesiyle elde edilir.

Problemin modellenmesi maksadıyla, $N=\{1, \dots, n\}$ düğüm kümesi ve E ayrıt kümesinden oluşan yönsüz ve bağlı $G=(N,E)$ serimi verildiğini varsayalım. w_j , j düğümü ile ilişkili negatif olmayan bir ağırlık; l_{ij} , $\{i,j\} \in E$ ayrıtı için pozitif bir uzunluk (maliyet); $d(i,i)=0$ ve $d(i,j) \leq d(i,k)+d(k,j)$, $i,j,k \in N$, olacak şekilde, i ve j düğümleri arasındaki en kısa yol uzunluğu olsun.

Herhangi bir ayrıt $\{i,j\} \in E$ için, $d(i,j)$ ile l_{ij} birbirinden farklıdır ve $l_{ij} \geq d(i,j)$, $\forall \{i,j\} \in E$. Mutlak eşitsizlik, sadece bir ayrıtın iki uç düğümü arasında ayrıtın kendisinden daha kısa bir yol varsa gerçekleşir.

Klasik model, i düğümündeki müşteri j düğümündeki bir tesisten hizmet aldığıında 1, diğer durumlarda 0 değerini alan x_{ij} karar değişkenlerini kullanır. $x_{ij} = 1$ ise, i düğümü j 'de bulunan tesise tahsis edilir. Böylece, değerleri 1 olan x_{ij} değişkenleri, tesislerin yerleştirildiği düğümleri gösterir. Model, aşağıda sunulmuştur.

Model CF: ReVelle ve Swain (1970)'nin Klasik Formülasyonu:

$$z^* = \min_x \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [w_i d(i,j)] x_{ij} \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i \in N \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{jj} = p \quad (3)$$

$$x_{ij} - x_{ji} \leq 0 \quad i, j \in N \quad (4)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad i, j \in N \quad (5)$$

Amaç fonksiyonu (1), toplam maliyeti enküçükler. Kısıt seti (2), her bir talep noktasının sadece bir tesise tahsis edilmesini sağlar. Kısıt seti (3), tahsis değişkenleri x_{ij} ile yerleşim değişkenleri x_{jj} 'yi birbiriyle ilişkilendirir. Bu kısıt seti, i düğümündeki müşterinin j düğümündeki tesise tahsis edilebilmesi için, j düğümünde bir tesisin yerleştirilmiş olmasını zorunlu kılar. Kısıt seti (4), tam olarak p adet tesisin yerleştirilmesini sağlar. Kısıt seti (5), karar değişkenlerini tanımlar.

ReVelle ve Swain (1970) formülasyonu, Klasik Formülasyon olarak kabul edilir ve p-ortanca problemine ilişkin literatürün büyük kısmına egemen olmuştur. ReVelle ve Swain (1970), problemi dal ve sınır tekniği (B&B) ile çözmüştür. Jarvinen, Rajala ve Sinervo (1972), n açık tesis ile başlayıp p açık tesis kalıncaya kadar birer birer tesislerin kapatılmasına dayanan bir B&B algoritması önermiştir. Garfinkel, Neebe ve Rao (1974), doğrusal programlama (DP) gevşetmesini çözmek için ayrıştırma tabanlı bir algoritma geliştirmiş ve sonuç tamsayı olmadığıında ise grup teorisini kullanarak çözmüştür. Narula, Ogbu ve Samuelsson (1977), Lagrange gevşetmesi ve subgradient metoduna dayalı bir yöntem önermiştir. Galvao (1980), DP gevşetmesinin sezgisel bir yöntemle çözülmesine dayalı bir B&B yöntemi geliştirmiştir.

Boffey ve Karkazis (1984), değişik sabit maliyetli bir dizi UFLP problemlerini çözerek problemi çözmüştür.

Christofides ve Beasley (1982), Lagrange gevşetmesini subgradient optimizasyonun takip ettiği bir yöntem kullanmıştır. Beasley (1985), 900 düğüm ve 90 tesise kadar problemleri çözecek şekilde bu algoritmayı geliştirmiştir. Mirchandani, Wong ve Oudjit (1985), Erlenkotter (1978)'in dual çıkış metodu ile dual simpleks metodu kullanan dual tabanlı bir yaklaşım önermiştir. Galvao and Raggi (1989), primal-dual algoritma, subgradient optimizasyon ve B&B'dan oluşan üç aşamalı hiyerarşik bir algoritma ile problemi çözmüştür. de Farias (2001), yüzey tanımlayan eşitsizliklere dayalı bir dal-ve-kesi algoritması önermiştir. Avella, Sassano ve Vasil'ev (2007), başarılı bir dal-ve-kesi-ve-fiyat algoritması geliştirmiştir. Bu algoritma ile, 900 düğümden 3795 düğüme kadar büyük çaplı problemler için ispatlanabilir iyi çözümler üretilmiştir. Church (2008), önerdiği BEAMR algoritması ile, 900 düğüme kadar olan problemleri, genel bir tamsayı programlama çözücüsü ile tam olarak veya belirli sınırlar içinde yaklaşık olarak çözmeyi başarmıştır. Bu model, ReVelle-Swain formülasyondaki kısıt matrisinin boyutunu, birçok kısıt ve değişkenleri eleyerek düşürmüştür. Bu sayede, genel bir çözücü kullanılabilmiştir.

p-ortanca problemi için, çoğu CF formülasyonuna dayalı çok sayıda sezgisel yöntem geliştirilmiştir. Reese (2006) tarafından yapılan literatür taramasında, p-ortanca problemi için 65 sezgisel yöntemden bahsedilmiştir. Mladenovic ve arkadaşları (2007) tarafından da, bir literatür taraması yapılmıştır. Burada, sezgisel yöntemlerin detaylarına girilmeyecektir.

CF formülasyonuna ilişkin yapılan kısa literatür özeti, bir tek formülasyonun çok sayıda araştırmaya esas teşkil edebileceğini açık olarak göstermektedir. Bu durum, iyi modellerin geliştirilmesinin önemini de ortaya koymaktadır. İyi bir formülasyon ya da farklı bir yaklaşım, hem uygulama hem de akademik anlamda yaygın bir etki yaratabilmektedir.

Minoux (1987)'un Küme Bölüntüleme Formülasyonu:

Minoux (1987), küme bölüntüleme tabanlı bir formülasyon önermiştir. S_k , $k=1, \dots, t$, N 'nin boş olmayan alt kümelerinin bir enümerasyonu olsun. Ayrışık ve düğüm kümesini kapsayan p

adet S_k kümesinin seçilmesi gerekmektedir. S_k ile ilgili olarak, $c_k = \min_{j \in S_k} \sum \{ d_{ij} : i \in S_k \}$ olsun.

$\mathbf{a}_k = (a_{1k}, \dots, a_{nk})^T$, eğer i düğümü S_k 'da ise 1, aksi takdirde 0 değerini alan a_{ik} 'lerden oluşan $n \times 1$ boyutlu bir vektör; \mathbf{e} , n adet 1'den oluşan bir sütun vektör olsun. x_k , \mathbf{a}_k sütunu seçildiğinde 1, aksi takdirde 0 değerini alan ikili bir değişken olarak tanımlansın. Bu tanımlara göre model aşağıda sunulmuştur.

Model SP: Minoux (1987)'nin Küme Bölüntüleme Formülasyonu:

$$z^* = \min_x \sum_{k=1}^t c_k x_k \quad (6)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^t \mathbf{a}_k x_k = e \quad (7)$$

$$\sum_{k=1}^t x_k = p \quad (8)$$

$$x_k \in [0,1] \quad k = 1, \dots, t \quad (9)$$

SP modelinde, $t=2^n-1$ sütun vardır ve DP gevşetmesinin çözülmesi için sütun türetme metotlarının kullanılması gerekir. Birçok uygulamada, sütunların seçilen bir alt kümesi kullanılmaktadır. Hansen ve Mladenovic (1997) ile du Merle ve arkadaşları (1999), sütun türetmeyi stabilize edecek yöntemleri tanıtmıştır. du Merle ve Vial (2002) tarafından, Lagrange gevşetmesi ve kesme düzlemlerini kullanan sütun türetme metoduna dayalı bir algoritma önerilmiştir. Senne, Lorena ve Preira (2005), stabil sütun türetme ile Lagrange gevşetmesini birleştiren bir dal-ve-fiyat algoritması geliştirmiştir.

Avella and Sassano (2001)'nin Yönlü Serim Tabanlı Formülasyonu:

Bu formülasyonda p -ortanca problemi, X 'teki düğümleri $N \setminus X$ 'teki düğümlere bağlayan $n-p$ ayrıtın toplam ağırlığını enküçükleyecek şekilde, yönlü tam serim $K_n=(N, A)$ 'de N 'nin p -elemanlı alt kümesi X 'in seçilmesi olarak tanımlanmıştır. Bu, N 'deki herbir düğüme ya hiç ayrıt gelmeyecek ya da sadece bir ayrıt gelecek şekilde $n-p$ ayrıtın seçilmesine karşılık gelmektedir. Çözümde, bir düğüme hiç ayrıt gelmiyorsa, düğüme bir tesis yerleştirildiği anlamını taşımaktadır. Bir tesis düğümünden çıkan ayrıt sayısı 0 ya da çok sayıda olabilir. Kendisine ayrıt gelen düğüm, ayrıtın başlangıç noktasında bulunan tesise tahsis edilir. x_{ij} değişkeni, (i,j) ayrıtı seçilen $n-p$ ayrıt arasında ise 1, aksi durumda 0 değerini alacak şekilde tanımlanırsa, model aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Model GBF: Avella ve Sassano (2001)'nin Yönlü Serim Tabanlı Formülasyonu:

$$z^* = \min_x \sum_{(i,j) \in A} w_j d(i,j) x_{ij} \quad (10)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i \in N - \{j\}} x_{ij} + x_{jk} \leq 1 \quad \forall (j,k) \in A \quad (11)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = n - p \quad (12)$$

$$x_{ij} \in [0,1] \quad \forall (i,j) \in A \quad (13)$$

Avella ve Sassano (2001), modellerinin polihedral bir analizini yapmış ve hesaplama testlerinde çok etkili olan bazı geçerli eşitsizlikler tanımlamıştır.

Elloumi (2010)'nin Mesafe Sıralı Formülasyonu:

Elloumi (2010)'nin formülasyonu, ilk olarak, Cornuejols, Nemhauser ve Wolsey (1980) tarafından verilmiştir. $t(i)$, mesafe matrisi $D=[d(i,j)]$ 'nin i 'nci satırındaki birbirinden farklı elemanlarının sayısı ve $D_{i1} < D_{i2} < \dots < D_{it(i)}$, i satırındaki birbirinden farklı elemanların bir

sıralaması olsun. $r=1, \dots, t(i)$ için, N_{ir} , $d(i,j) \leq D_{ir}$ koşulunu sağlayan N 'nin düğüm kümesi olsun. z_{ir} değişkeni, N_{ir} 'de bir tesis açılmazsa 0, aksi durumda 1; x_i değişkeni, i düğümünde tesis açılırsa 1, aksi durumda 0 değerini alacak şekilde tanımlanarak, problem aşağıdaki şekilde modellenebilir.

Model DOF: Elloumi (2010)'nin Mesafe Sıralı Formülasyonu

$$z^* = \min_{x, z} \sum_{i \in N} (D_{ii} + \sum_{r=1}^{t(i)-1} (D_{i,r+1} - D_{ir})) z_{ir} \quad (1)$$

$$s.t. \quad \sum_{j \in N} x_j = p \quad (15)$$

$$z_{ir} + \sum_{j \in N_{ir}} x_j \geq 1 \quad i \in N, r = 1, \dots, t(i) \quad (16)$$

$$z_{it(i)} = 0 \quad i \in N \quad (17)$$

$$z_{ir} \geq 0 \quad i \in N, r = 1, \dots, t(i) \quad (18)$$

$$x_j \in \{0, 1\} \quad j \in N \quad (19)$$

Kısıt seti, N_{ir} 'de bir tesis yoksa z_{ir} 'nin 1 değerini almasını sağlar. Kısıt seti, $N_{it(i)} (=N)$ 'de en az bir tesisin açılmasını zorunlu kılar. i düğümüne ilişkin amaç fonksiyonundaki maliyet, $z_{it} = 0$ ise D_{it} , $z_{it} = 1$ ise D_{i2} , vb. değeri alır. Elloumi (2010), $r = 1$ ve $i \in N$ için kısıt seti 'yü kullanmış; $r=2, \dots, t(i)$ ve $i \in N$ için ise, sağ taraf değerlerini $z_{i,r-1}$ olarak değiştirmiştir. Elloumi (2010), bu formülasyonun DP gevşetmesini çalışmış ve standart dal-ve-kesi algoritmasının performansında önemli iyileştirmeler sağladığını gösteren hesaplama sonuçları sunmuştur.

2.2. Kapasiteli p-Ortanca Problemi

Literatürde yer alan kapasiteli p-ortanca probleminde, kapasite kısıtları sadece tesisler için tanımlanmıştır. Bu nedenle, kapasiteli olarak ele alınan problem aslında, düğüm kapasitelidir. Ayrıntı kapasiteli p-ortanca problemi, literatürde hiç çalışılmamıştır.

Düğüm kapasiteli p-ortanca problemi, gerçek hayatta çok sayıda uygulama alanı bulmuştur (örneğin, Daskin, 1995; Correa vd., 2004; Mirzaian, 1985; Pirkul, 1987; Bozkaya vd., 2003; Osman and Christofides, 1994; Klein ve Aronson, 1991; Hansen ve Jaumard, 1997; Zhou, 2003; Schaeffer, 2007.)

Kapasiteli p-ortanca problemi, CF'ye bir kısıt seti eklemek suretiyle modellenebilir. j düğümündeki toplam kapasite W_j olarak tanımlanırsa, numaralı kısıt eklenerek, kapasiteli p-ortanca modeli elde edilebilir.

CCF: Kapasiteli p-Ortanca Modeli:

() – ()'e ilave olarak,

$$\sum_i w_i x_{ij} - W_j y_j \leq 0 \quad j \in N \quad (20)$$

Kısıt 'nin kullanıldığı modelin DP gevşetmesinin amaç fonksiyon değerini iyileştirmek için, kısıt de modele eklenebilir.

$$x_{ij} - y_j \leq 0 \quad j \in N \quad (21)$$

Kapasiteli p-ortanca problemi, NP-zordur. (Garey and Johnson, 1979). CCF'yi tam olarak çözmek için, Pirkul (1987) Lagrange gevşetmesi tabanlı bir B&B algoritması önermiştir. Ceselli ve Righini (2005) ise, dal-ve-fiyat algoritması geliştirmiştir.

CCF için çeşitli sezgisel ve metasezgisel algoritmalar geliştirilmiştir. Örnek olarak, Mulvey ve Beck (1984), Koskosidis ve Powell (1992), Baldacci vd. (2002), Lorena ve Senne (2003, 2004), Fleszar ve Hindi (2008), Golden ve Skiscim (1986), Maniezzo vd. (1998), França vd. (1999), Correa vd. (2004), Ahmadi ve Osman (2005), Osman ve Ahmadi (2006), Scheuerer ve Wendolsky (2006), Diaz ve Fernandez (2006), Chaves vd. (2008), Resurreccion (2006), Pitakaso ve Sindhuchao (2006), Rodney vd. (2008), Ghoseiri ve Ghannadpour (2009) verilebilir.

Kapasiteli ve kapasitesiz p-ortanca problemleri için geliştirilen modeller incelendiğinde, modellerin, giriş bölümünde detayları açıklanan Varsayım 1'e dayandığı görülmektedir. Bu kapsamda, söz konusu modeller, Varsayım 1'in geçerli olmadığı durumlar için kullanılamaz. Örneğin, üçgen eşitsizliğinin sağlanmadığı durumlarda, mevcut modeller doğru sonuç vermez. Buna ilave olarak, gerçek hayattaki sistemlerin bazı özelliklerinin mevcut modellerde bazı değişiklikler yapılarak modellenmesi, ya çok zor ya da imkansızdır. Bu nedenle, Varsayım 1'in kullanılmasından kaynaklanan dezavantajlar, p-ortanca problemleri için de geçerlidir. Bu bağlamda, anılan eksikliklerin giderilmesi için, yeni modellerin ve çözüm yöntemlerinin geliştirilmesi, önemli bir ihtiyaç olarak ortaya çıkmaktadır. Proje kapsamında, Varsayım 1'in geçerli olmadığı durumlarda kullanılabilen ve böylece söz konusu eksiklikleri gideren akış tabanlı modeller geliştirilmiştir. Ayrıca, söz konusu modelleme yaklaşımı ile, bazı problemler (örneğin, ayrıt kapasiteli ve karma kapasiteli p-ortanca problemleri) için literatürde ilk kez matematiksel modeller önerilmiştir.

2.3. p-Hub Ortanca Problemi

Hub problemleri, bir serim üzerindeki çeşitli noktaların (düğümlerin), ürün (veri, yolcu, paket, vs.) gönderip aldıkları ulaştırma ve telekomünikasyon sistemlerinde ortaya çıkar. Bu sistemlerin performansı, ürünlerin toplandığı ve dağıtıldığı geçiş noktaları (hub) kullanılarak artırılabilir. Bu sistemlerde, ölçek ekonomisinden istifade etmek ve maliyeti düşürmek amacıyla, tespit edilen hub noktaları arasında az sayıda yüksek kapasiteli araçlar,



kablolar, vs. kullanılır. Hub noktalarına gelişler ve hub noktalarından gidişler ise, düşük kapasiteli araçlar, kablolar, vs. üzerinden gerçekleştirilir. Örneğin, UPS gibi paket taşımacılığı yapan şirketler, çeşitli bölgelerde ana toplama ve dağıtım üssü oluşturur ve bu üslerin hangi noktalara hizmet edeceğini tayin ederler. Herhangi bir yerden gönderilecek bir paket, ilk olarak bağlı olduğu hub noktasına taşınır. Bu genellikle, küçük araçlarla yapılır. Hub noktasında, hub tarafından hizmet sağlanan tüm yerlerden gelen paketler tasnif edilir ve varış noktalarına göre gruplandırılır. Her bir grup, başka bir hub noktasına taşınacak paketleri temsil eder. Daha sonra bu paket grupları, ayrı tırlara yüklenerek diğer hub noktalarına taşınır. Diğer hub noktasına ulaşan paketler, yeniden tasnif edilir ve varış noktalarına göre küçük araçlarla nihai adreslerine ulaştırılır. Paketleri adreslerine teslim eden araçlar, aynı zamanda bu adreslerden başka adreslere gönderilecek paketlerin hub noktasına taşınmasında kullanılabilirler. Bu paketler de aynı sürece tabii tutulur. Özetle, sistem, bir hub noktasında hem alma hem de gönderme işlemi yapılacak şekilde, aynı esaslar çerçevesinde işletilir. Hizmet politikasına bağlı olarak, bir paketin hiçbir hub noktasına uğramaması, sadece bir hub noktasına uğraması ya da birden fazla hub noktasına uğraması gibi farklı şekillerde hizmet sağlanabilir. Hub problemlerinin ana hedefi, noktalar arasındaki taşıma talepleri en az maliyetle karşılanacak şekilde, hub noktalarının ve hub noktalarının hizmet sağlayacağı yerlerin belirlenmesidir.

Seçilecek hub sayısının önceden bilindiği hub problemleri, p-hub ortanca problemi olarak isimlendirilir. Bu problemlerde, bir düğümden diğer düğüme taşınacak ürün miktarının bilindiği varsayılır. Düğüm çiftleri arasında taşınacak olan malzeme miktarları aynı olmak zorunda değildir. Yani, A düğümünden B düğüme ve B düğümünden A düğüme taşınacak miktarlar farklı olabilir. Böyle bir sistemin işletme maliyeti, serimdeki düğümlerarası mesafelere, taşınacak miktarlara ve ürünün taşındığı linkin (yolun) tipine bağlıdır (Hub noktaları arasındaki ulaşım maliyeti daha ucuzdur). Hub noktalarında veya ayrıtlar üzerinde kapasite kısıtları yoktur. Hub olmayan bir düğüm noktası, tüm gelen ve giden ürün miktarını tek bir hub üzerinden yapabileceği gibi (tek atama) birden fazla hub üzerinden de (çoklu atama) yapabilir.

Hub problemlerine ilişkin güncel literatür incelemeleri, Alamur ve Kara (2008) ile Farahani ve arkadaşları (2013) tarafından gerçekleştirilmiştir. Literatür incelendiğinde, çalışmaların tek atamaya dayalı hub problemleri üzerinde yoğunlaştığı görülmektedir. Problemin çoklu atama versiyonu için, Campbell (1994) tamsayıli modeller geliştirmiş; Campbell (1996), bir değişim sezgiseli önermiştir. Aykin (1995), problemin çeşitli versiyonları için enümersasyon ve değişim sezgiseli geliştirmiştir. Klincewicz (1994), hub sayısının sınırsız olduğu bir dizi hub yerleşim modelini kullanan dual çıkış yöntemi ile problemi çözmüştür. Bu çalışmada, probleme ilişkin hesaplama test sonuçları da sunulmuştur. Probleme ilişkin en kapsamlı hesaplama testleri,

Skorin-Kapov ve diğerleri (1994) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmalarda elde edilen sonuçlar, problem için geliştirilen çözüm yöntemlerinin ancak küçük çaplı problemler için (örneğin, 20 düğümlü serimler için) çözümler üretebildiğini göstermiştir. Bu nedenle, daha büyük çaplı problemlerin çözülebilmesi için problemin farklı şekillerde modellenmesine yönelik çalışmalar gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmalar içinde, Ernst ve Khrisnamoorthy (1998) tarafından geliştirilen akış tabanlı model, genel olarak en başarılı model olarak kabul edilmektedir. Ancak, Marin, Canovas ve Landete (2006) tarafından, düğümler arasındaki mesafenin üçgen eşitsizliğini sağlamadığı durumlarda modelin doğru sonuç vermediği ispatlanmış ve bu durumlar için de doğru sonuç verecek bir model geliştirilmiştir. Aşağıda bu modeller açıklanmıştır.

$G=(N, A)$, düğüm kümesi $N=\{1, \dots, n\}$ ve ayrıt kümesi $A=N \times N$ olan tam bir serimdir.

Her bir düğüm çifti (i, j) için, i 'den j 'ye gönderilmesi gereken ürün miktarı w_{ij} ve i 'den j 'ye olan mesafe d_{ij} olarak tanımlanmıştır. Eğer i ve j düğümleri hub noktaları olarak tayin edilmişse, maliyetin (mesafenin) α faktörü ile azaltıldığı varsayılmıştır. Serimde hub olarak

kullanılacak düğüm sayısı, p 'dir. $O_i = \sum_j w_{ij}$, $i=1, \dots, n$, i 'den gönderilmesi gereken

toplam ürün miktarı, $D_j = \sum_i w_{ij}$, $j=1, \dots, n$, j noktasına gönderilmesi gereken ürün miktarıdır.

Ernst ve Khrisnamoorthy (1998) Modeli

Modelde kullanılan karar değişkenleri; (1) Y_k, k düğümü hub olarak tayin edilirse 1, aksi takdirde 0, (2) ZZ_{ik} , i 'den doğrudan hub k 'ye giden ürün miktarı, (3) H_{ikm} , i 'den doğrudan hub k 'ye, buradan da doğrudan m noktasına giden ürün miktarı ve (4) NN_{ijm} , i 'den herhangi bir hub düğümüne, sonra hub m 'ye ve en son da j noktasına giden ürün miktarı, olarak tanımlanmıştır.

Model EK: Ernst and Khrisnamoorthy (1998) Formülasyonu

$$\min_{Y, NN, H, ZZ} z^* = \quad (22)$$

$$\sum_{i,k} d_{ik} \times ZZ_{ik} + \sum_{i,k,m} \alpha \times d_{km} \times H_{ikm} + \sum_{i,j,m} d_{mj} \times NN_{ijm}$$

s.t. $\sum_k ZZ_{ik} = O_i \quad \forall i \quad (23)$

$$\sum_m NN_{ijm} = W_{ij} \quad \forall i, j \quad (24)$$

$$\sum_m H_{ilm} + \sum_j NN_{ijl} - ZZ_{il} - \sum_k H_{ikl} = 0 \quad \forall i, l \quad (25)$$

$$ZZ_{ik} \leq O_i Y_k \quad \forall i, k \quad (26)$$

$$\sum_i NN_{ijm} \leq D_j Y_m \quad \forall j, m \quad (27)$$

$$\sum_k Y_k = p \quad (28)$$

$$Y_k \in \{0,1\} \quad \forall k \quad (29)$$

$$NN_{ijm}, H_{ikm}, ZZ_{ik} \geq 0 \quad \forall i, j, k, m \quad (30)$$

Amaç fonksiyonu () toplam maliyeti minimize eder. () ve () numaralı kısıtlar, kaynak noktalarından varış noktalarına tüm akışın gerçekleşmesini sağlayan arz ve talep kısıtlarıdır. () numaralı kısıtlar, ara düğümlere ilişkin akış dengesi kısıtlarıdır. () ve () numaralı kısıtlar, hub olmayan bir ara düğümden akışın olmasını önler. () numaralı kısıtlar, seçilecek hub noktalarının sayısını belirler. () ve () numaralı kısıtlar, karar değişkenlerini tanımlar.

Marin, Canovas ve Landete (2006) Modeli

EK Modeli, düğümler arasındaki mesafelerin üçgen eşitsizliğini sağladığı varsayımı üzerine kurulmuştur. Aksi takdirde, model doğru sonuç vermez. Bu sorunu aşmak için, Marin ve diğerleri (2006), EK modeline ilave kısıtlar eklemiştir.

Model MCL: Marin, Canovas ve Landete (2006) Formülasyonu:

() Numaralı amaç fonksiyonu ve () - () numaralı kısıtlara ilave olarak;

$$\sum_m H_{ikm} \leq O_i Y_k \quad \forall i, k \quad (31)$$

$$\sum_k H_{ikm} \leq O_i Y_m \quad \forall i, m \quad (32)$$

$$\sum_m H_{ikm} \leq ZZ_{ik} \quad \forall i, k \quad (33)$$

$$ZZ_{ii} \geq O_i Y_i \quad \forall i \quad (34)$$

$$NN_{ijj} \geq w_{ij} Y_j \quad \forall i, j \quad (35)$$

() ve () numaralı kısıtlar, H değişkenleri ile tanımlanan akışların bir hub noktasından başka bir hub noktasına gitmesini sağlar. () numaralı kısıtlar, çıkış noktası bir hub düğümü ise, aynı düğüm içine bir ilk akış olduğunu; () numaralı kısıtlar, varış noktası bir hub düğümü ise, aynı düğüm içinde bir son akış olduğunu ima eder. () numaralı kısıtlar, bir akış tarafından geçilen düğümlerin sayısını sınırlar.

Literatür incelemesinden de görüldüğü üzere, p-hub ortanca modellerinin tamamı tam serim yapısı üzerine inşa edilmiştir. Söz konusu modellerden, sadece MCL modeli, üçgen

eşitsizliğinin sağlanmadığı durumlarda doğru sonuç vermektedir. Ancak, MCL, aşağıda açıklanan ve sık sık eleştirilen bazı varsayımlara dayanmaktadır.

Söz konusu varsayımları açıklamak üzere, yukarıdaki tanımlanan serim tiplerine ilave olarak, iki tip serim tanımlanacaktır: (1) *Hub serimi* (HS): Bir modelin çözümündeki düğümlerarası pozitif akışlar ile belirlenen serim yapısı. HS, hub düğümleri ve hub olmayan düğümler ile kaynak-talep düğüm çiftleri arasındaki hizmet rotalarından oluşur. HS, yukarıda ÇS olarak tanımlanan serimin, ana dağıtım üssü problemlerine uyarlanmış halidir. (2) *Hub-katmanı serimi* (HLN): HLN, hub düğümler ile hub düğümleri birbirine bağlayan linklerden oluşan HN'nin bir alt serimidir.

Bir hub sisteminde, kaynak düğümünden bir hub düğümüne *toplama* (*collection*), hub düğümleri arasında *transfer* ve son hub düğümünden talep/hedef düğümüne *dağıtım* (*distribution*) olmak üzere üç tip hareket ya da akış vardır. Birçok çalışmada, toplama, transfer ve dağıtım için, sırasıyla, tüm ayrıtlar için geçerli olan sabit maliyetler (birim mesafe başına birim akış maliyeti) χ , α , ve δ atanır. Bu çalışmalarda, ölçek ekonomisinin modellenmesi için $\alpha < \chi$ ve $\alpha < \delta$ olarak kabul edilir ve genellikle, $\chi = \delta = 1$ ve $0 \leq \alpha \leq 1$ kullanılır. Bu maliyet modeli ile, *tüm hub düğümleri arasındaki ayrıtların ulaştırma maliyetleri, ayrıtlar üzerindeki akış miktarları dikkate alınmadan, sabit bir faktör α kadar azaltılır (Varsayım 2)*. Ayrıca, birçok modelde, *kaynak-talep düğümleri arasındaki tüm akışların bir veya daha fazla hub üzerinden sağlandığı varsayılır (Varsayım 3)*. Başka kısıtlamalar olmadan üç varsayımın birlikte kullanılması durumunda, optimal çözümde, *HS'deki akışlar en fazla iki hub düğümünü kullanır (Özellik 1)*. Diğer bir ifadeyle, HS'de bir kaynak-talep düğüm çifti arasındaki bir rota, üç ayrıttan (toplama, transfer/hub ve dağıtım) oluşur. (Dağıtım ve toplama ayrıtları, erişim (access) ayrıtları olarak da tanımlanır.) Tüm kaynak-talep düğüm çiftleri arasında akışların olduğu varsayılırsa, Özellik 1, tüm hub düğümlerinin birbiriyle doğrudan bağlantılı olduğu bir yapının oluşmasını sağlar. Diğer bir ifadeyle, HLN, tam serim yapısına sahip olur (Özellik 2).

Özellik 1 ve 2, MCL dahil birçok modelde, HS üzerinde topolojik kısıtlar olarak modellenmiştir. Ancak, bu özelliklerin kısıtlayıcı olduğu birok durum ortaya çıkabilir. Örneğin, MS'deki mesafeler üçgen eşitsizliğinin sağlamıyorsa, optimal rota üzerinde birden fazla hub olabilir. Aynı şekilde, hub düğümleri arasındaki ayrıtların kurulum maliyetleri çok yüksek ise, HLN'nin tam serim yapısına sahip olması, uygun olmayabilir. Bazı çalışmalarda (örneğin, Campbell vd., 2005a, 2005b; Alumur vd., 2009; Çalik vd., 2009; Yaman, 2009; Contreras vd., 2010; Campbell, 2010; ve Martins de Sa vd., 2013, 2015a, 2015b), HLN ve erişim katmanı serimlerinde farklı topolojilere izin vermek suretiyle, söz konusu eksiklikler giderilmeye çalışılmıştır. Ancak, bu çalışmalar da Varsayım 1'e dayandığından, uygulama alanları



sınırlıdır. Örneğin, üçgen eşitsizliği sağlanmadığında, ağaç yapısına sahip bir HLN oluşturulamaz.

Varsayım 3 ve Özellik 2 ile ilgili diğer bir husus, ölçek ekonomisinin modellenmesiyle ilgilidir. Mevcut çalışmalarda, akışların hub ayrıtları üzerinde yoğunlaşacağı varsayımıyla, hub ayrıtları üzerindeki tüm maliyetler α faktörü ile azaltılmaktadır. Ancak optimal akışlar incelendiğinde, bazı erişim ayrıtlarının bazı hub ayrıtlarından daha fazla akış taşıdığı görülmektedir. Buna rağmen, erişim ayrıtları üzerindeki maliyetlere bir azaltma faktörü uygulanmamaktadır. Bu durumu düzeltmek üzere, bazı araştırmacılar (örneğin, O'Kelly ve Bryan, 1998), hub ayrıtları üzerindeki maliyetlere akış miktarına bağlı azaltımların uygulandığı modeller geliştirmiştir. Campbell vd. (2005a, 2005b), hub düğümleri yerine, uç noktaları birer hub düğümü olan hub ayrıtları yerleştirmiştir. Bu çalışmada, hub ayrıtlarının bağlı olması zorunluluğu olmadığı için, HLN'nin tam serim yapısına sahip olması özelliği gevşetilmiştir. Campbell (2013), farklı veri setlerini kullanarak, Campbell vd. (2005a, 2005b) ile O'Kelly ve Bryan (1998) dahil farklı modeller ile elde edilen çözümlerdeki hub ve erişim ayrıtları üzerindeki akışları analiz etmiştir. Analizler neticesinde, erişim ayrıtları üzerindeki akışların hub ayrıtları üzerindeki akışlardan büyük olmasına, tüm modellerin değişen derecelerde müsaade ettiğini tespit etmiştir. Campbell (2013), ölçek ekonomisinin iyi bir şekilde modellenemesinin temel nedeninin, HLN'nin tam serim olması zorunluluğu ve erişim ayrıtları üzerinde maliyetlerin azaltılmaması olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Proje kapsamında, söz konusu eksiklikleri gideren modeller geliştirilmiştir. Geliştirilen modellerde, HLN ve erişim katmanı serimleri için herhangi bir topoloji zorunluluğu yoktur. Tüm hub ayrıtları üzerindeki maliyetlerin azaltılması gerekmez ve erişim ayrıtları üzerindeki maliyetler de azaltılabilir. Hatta, GS üzerindeki tüm ayrıtlara, farklı akış tipleri (toplama, transfer ve dağıtım) için, farklı maliyetlerin atanması mümkündür. Proje kapsamındaki temel model, hub ve erişim ayrıtları üzerinde akış miktarına bağlı olmayan maliyetler esas alınarak oluşturulmuştur. Ancak, akış miktarına bağlı maliyetler, modellerin ana yapısını değiştirmeden kolaylıklar eklenebilir. Geliştirilen modelleme yaklaşımı, hub olmayan düğümler arasında doğrudan akışlara müsaade edilmesi ve ağaç yapısına sahip HLN gibi çeşitli ihtiyaçları modelleme esnekliğine de sahiptir.

3. GEREÇ VE YÖNTEM

Bu bölümde, p-ortanca pve p-hub ortanca problemlerinin çeşitli versiyonları için geliştirilen model ve çözüm yöntemleri detaylı olarak açıklanmıştır. Ele alınan problemler şunlardır:

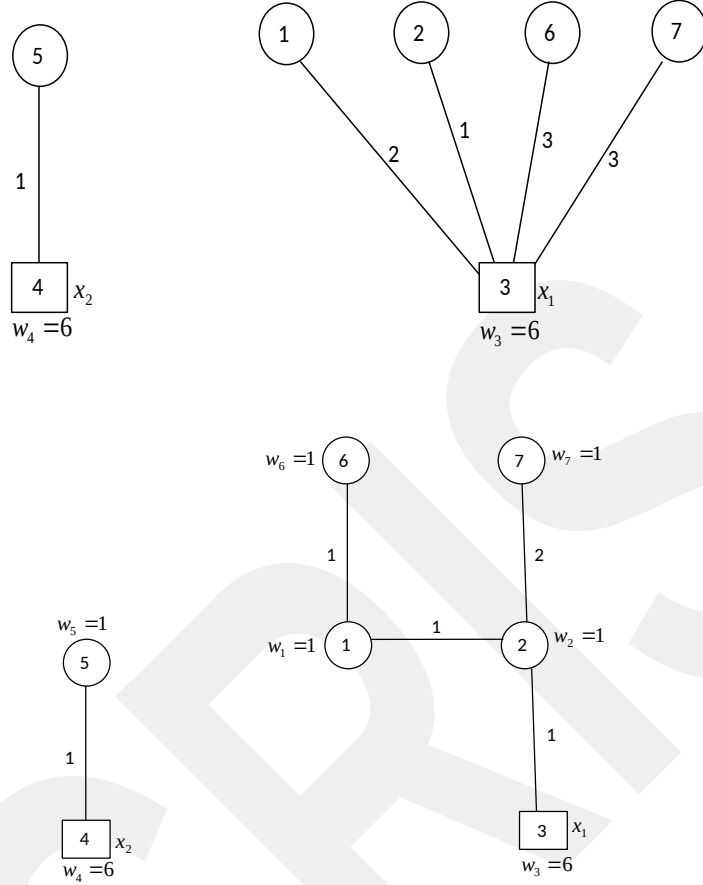
- p-Ortanca Problemi
 - o Kapasitesiz p-Ortanca Problemi

- o Ayırıt Kapasiteli p-Ortanca Problemi
- o Düşüm Kapasiteli p-Ortanca Problemi
- o Karma (Ayırıt/Düşüm) Kapasiteli p-Ortanca Problemi
- p-Hub Ortanca Problemi
 - o Kapasitesiz p-Hub Ortanca Problemi
 - o Ayırıt Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi
 - o Hub Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi
 - o Karma (Ayırıt/Hub) Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi
 - o Ağaç Yapılı p-Hub Ortanca Problemi
 - o p-Hub Ortanca Kesme/Önleme Problemi

3.1. *Kapasitesiz p-Ortanca Problemi*

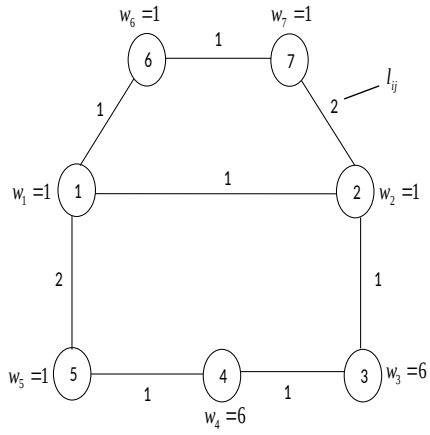
p-Ortanca problemi için geliştirilen modellerin tamamı, merkezinde bir tesisin ve etrafında bu tesise tahsis edilen talep noktalarının bulunduğu p adet yıldız-ağaçtan oluşan bir çözüm üretir. Her bir ağacın maliyeti, tesis düğümü ile bu düğüme tahsis edilen talep düğümlerini birbirine bağlayan ayırıtın maliyetlerinin toplamıdır. Çıktının yıldız-ağaç yapısında olabilmesi için, tüm çiftler arasındaki maliyetlerin bilinmesi ya da serim yapısının tam olması gerekmektedir. Halbuki, tam serim yapısı elde edilmeden de çözümün elde edilmesi mümkündür. Şekil 1’de, $p=2$ için yıldız-ağaç yapısı ve en kısa yol tabanlı aynı amaç fonksiyon değerine sahip çözümler sunulmuştur. Proje kapsamında p-ortanca problemi için geliştirilen modeller, en kısa yol tabanlı çözümler üretmektedir. Yaklaşımın temelini, “en fazla p bileşeni olan bağlı ya da bağlı olmayan bir serimin, kapsayan ormana sahip olduğu ve bu kapsayan ormanın da serimin en iyi p-ortanca çözümüne karşılık geldiği” gerçeği oluşturmaktadır. Bu bağlamda, kapsayan orman yapısını verecek şekilde çeşitli modeller geliştirilebilir. Proje kapsamında, akış tabanlı modeller tercih edilmiş ve tek malzemeli ve çok malzemeli olmak üzere iki akış tabanlı model geliştirilmiştir.

Akış tabanlı modellerin her ikisinde, p-ortanca problemi, modifiye edilmiş bir serim yapısı üzerinde kapsarağaç problemi olarak ele alınmıştır. Elimizde $G=(N,E)$ seriminin olduğunu varsayalım ve $G^*=(N^*,A^*)$ 'yi, $N^*=\{0\}\cup N$ ve $A^*\equiv\{(0,j):j\in N\}\cup A$, $A\equiv\{(i,j):\{i,j\}\in E\}\cup\{(j,i):\{i,j\}\in E\}$, olacak şekilde tanımlayalım.

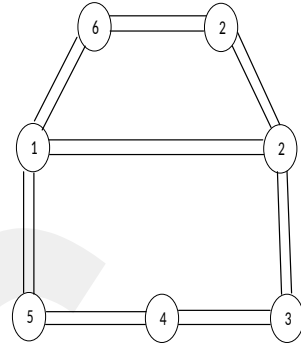


Şekil 1. Yıldız ağaçlar ve en kısa yol tabanlı çözümler

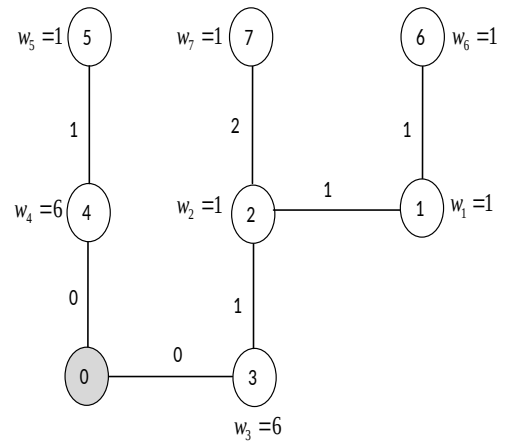
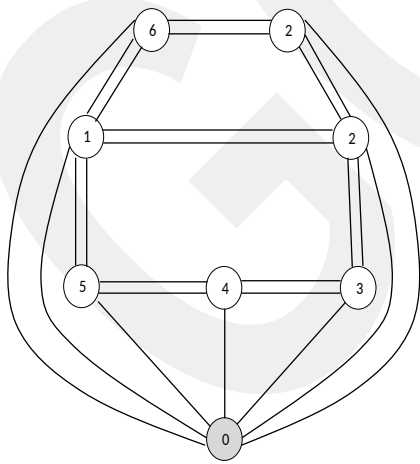
G^* seriminde, N 'deki düğümlere ilave olarak 0 düğümü, 0 düğümü ile N 'deki her bir j düğümünü bağlayan yönlü ayrıtlar ve E 'deki yönsüz ayrıtlar $\{i,j\}$ 'nin yerini alan (i,j) ve (j,i) şeklindeki yönlü ayrıtlar vardır. A 'daki her bir (i,j) ve (j,i) 'ye l_{ij} uzunluğunu ve $(0,j)$, $j \in N$, ayrıtlarına 0 ($l_{0j}=0$) uzunluğunu atayalım. $G=(N,A)$, $G^*=(N^*,A^*)$ 'nin alt serimi ve $G=(N,E)$ 'nin yönlü versiyonu olsun. N^* 'deki toplam düğüm sayısı $n+1$, A^* 'daki toplam ayrıtlar sayısı $2|E|+n$ 'dir. $G^*=(N^*,A^*)$ 'nin 0 düğümünde köklü kapsayan arboresence'ı $T=(N^*,A^*(T))$ 'de, (1) 0 düğümünden her bir $i \in N$ 'ye yönlü bir yol vardır ve (2) 0 düğümü dışında diğer tüm düğümlere sadece bir giren ayrıtlar vardır ve 0 düğümüne giren ayrıtlar yoktur. $A^*(T)$ ayrıtlar kümesi, tam olarak n ayrıtlara sahiptir. Eğer ayrıtlar yönleri dikkate alınmazsa, oluşan kapsar arboresence, aslında $G^*=(N^*,A^*)$ 'nin bir kapsar arboresence'tadır. Bir kapsar arboresence'ta, 0 düğümünden çıkış yapan en az 1 ve en fazla n adet ayrıtlar vardır. Eğer 0 düğümünden çıkış yapan ayrıtların sayısını p ile sınırlandırırız ve ortaya çıkan yapıda 0 düğümünden çıkış yapan ayrıtları kaldırırız, $G=(N,A)$ seriminde p bileşenli bir orman elde edilmiş olur. Şekil 2'de, $G=(N,E)$, $G=(N,A)$, $G^*=(N^*,A^*)$ ve $p=2$ olacak şekilde bir arboresence görülmektedir.



(a) $G = (N, E)$



(b) $G' = (N, A)$



$$(c) G^* = (N^*, A^*)$$

(d) Kapsar arborescence (Total cost=10)

Şekil 2. Örnek bir serimin modelleme için modifiye edilmesi ve örnek bir arborescence

Tek-Malzemeli Akış Tabanlı p-Ortanca Modeli (TMATP)

TMATP, $G^*=(N^*,A^*)$ üzerinde, standart tek malzemeli akış modeline, 0 düğümünden doğrudan ulaşılabilen düğüm sayısını sınırlandıran kısıtın eklenmesiyle tanımlanmıştır. Her bir düğüm $k \in N$, kaynağı 0 olan bir malzemedan w_k birim talep eden bir batak düğümü olarak

kabul edilmiştir. 0 düğümünde, $W = \sum_k w_k$ birim kaynak vardır.

Karar Değişkenleri

x_{ij} (i,j) ayrıtı üzerinden gönderilen akış miktarı

y_j j düğümüne bir tesis yerleştirilirse 1, aksi takdirde 0

Model TMATP: Tek-Malzemeli Akış-Tabanlı p-Ortanca Modeli

$$z^* = \min_{x,y} \sum_{(i,j) \in A^*} l_{ij} x_{ij} \quad (36)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in N} x_{0j} = W \quad (37)$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A^*} x_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A^*} x_{ji} = -w_i \quad i \in N \quad (38)$$

$$\sum_{j \in N} y_j = p \quad (39)$$

$$x_{0j} - W y_j \leq 0 \quad j \in N \quad (40)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i,j) \in A^* \quad (41)$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad j \in N \quad (42)$$

Amaç fonksiyonu (36), toplam maliyeti minimize etmektedir. Kısıt (37), 0 düğümü için; kısıt seti (38), 0 dışındaki düğümler için akış dengesi kısıtlarıdır. Kısıt (39), 0 düğümünden çıkış yapan toplam akışın W 'ye eşit olmasını; kısıt seti (40) ise her bir düğümün talebinin karşılanmasını sağlar. i düğümünün talebi, ya doğrudan i 'den ya da başka bir düğüm $j \neq i$ 'deki bir tesisten karşılanır. İlkinde, 0 düğümünden doğrudan i düğümüne bir akış vardır. Eğer i düğümünden talebi karşılanan tek düğüm i ise, $x_{0i} = w_i$. Aksi takdirde, $x_{0i} > w_i$. i düğümünden, k düğümünün de hizmet aldığı varsayarsak, $x_{0i} = w_i + w_k$. İkincisinde,



$x_{0i} = 0$ fakat $\sum_{j \neq i, 0} x_{ji} \geq w_i$. Eğer i düğümü, uç bir düğüm ise, $\sum_{j \neq i, 0} x_{ji} = w_i$. Aksi takdirde,

$\sum_{j \neq i, 0} x_{ji} > w_i$. Kısıt (), 0'dan doğrudan ulaşılabilen düğüm sayısını p 'ye eşitlemektedir. Kısıt

seti (), x_{0j} ile y_j değişkenleri arasındaki ilişkiyi tanımlamaktadır. Eğer $y_j = 0$ ise, $x_{0j} = 0$

ve eğer $y_j = 1$ ise, x_{0j} , W 'ye kadar bir değer alabilir. Kısıtlar () ve (), değişkenleri

tanımlamaktadır. Modelin yapısı gereği, x_{ij} değişkenleri gerçek sayı olarak tanımlanmış olsa da tamsayı değerler alacaktır.

TMATP'de kısıt sayısı $2n+2$; ikil ve gerçek değişken sayısı ise, sırasıyla, n and $2|E|+n$ 'dir. Bu özellikleri ile TMATP, çok compact (tıkız) bir modeldir ancak doğrusal programlama gevşetmesinin optimal amaç fonksiyon değeri sıfırdır.

Önerme 1: TMATP'nin doğrusal programlama gevşetmesinin optimal amaç fonksiyon değeri 0'dır.

İspat: Doğrusal programlama gevşetmesi için, amaç fonksiyon değeri 0 olan bir çözüm

olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için, $x_{ij} = 0$, $i, j \in N$, ve $x_{ij} = w_j$, $i = 0, j \in N$, olarak tanımlayalım. Diğer bir deyişle, tüm talepler, doğrudan 0 düğümünden karşılanmaktadır.

Herhangi $p - 1$ düğüm için (örneğin, $j = 1, \dots, p - 1$), $y_j = 1$ olsun. $j = p, \dots, n - 1$ için

$y_j = w_j / W$ ve $j = n$ için $y_j = (w_j + \sum_{k=1}^{p-1} w_k) / W$ olarak tanımlayalım. Bu değerleri, modelde yerine koyarsak, tüm kısıtların sağlandığı görülebilir. Bu değerlere karşılık gelen amaç fonksiyon değeri de 0'dır.

TMATP'nin doğrusal programlama gevşetmesinin optimal amaç fonksiyon değerinin 0 olması nedeniyle, Çok-Malzemeli Akış Modeli tanımlanmıştır.

Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p -Ortanca Modeli (ÇMATP)

ÇMATP, yukarıda açıklanan serim yapısı üzerinde tanımlanmıştır. Her bir düğüm $k \in N$, k malzemesi için bir batac düğümüdür ve k malzemesi için talebi w_k birimdir. 0 düğümünde, her bir malzeme tipi k için, w_k birim kaynak vardır.

Karar Değişkenleri

x_{ijk} Varış noktası k olan malzemenin (i, j) ayrıtı üzerindeki akış miktarı

y_j j düğümüne bir tesis yerleştirilirse 1, aksi takdirde 0

Model ÇMATP: Çok-Malzemeli Akış-Tabanlı p-Ortanca Modeli

$$z^* = \min_{x,y} \sum_{k \in N} \sum_{(i,j) \in A^*} l_{ij} x_{ijk} \quad (43)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in N} x_{0jk} = w_k \quad k \in N \quad (44)$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A^*} x_{ijk} - \sum_{j:(j,i) \in A^*} x_{jik} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq k \\ -w_k & \text{if } i = k \end{cases} \quad i, k \in N \quad (45)$$

$$\sum_{j \in N} y_j = p \quad (46)$$

$$x_{0jk} - w_k y_j \leq 0 \quad j, k \in N \quad (47)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad (i, j) \in A^*, k \in N \quad (48)$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad j \in N \quad (49)$$

Amaç fonksiyonu (43), serimden geçen toplam akışın maliyetini minimize etmektedir. Kısıt seti (44), süper düğüm için akış dengesi kısıtlarıdır. Süper düğümden çıkış yapan k düğümü varışlı malzeme miktarı, malzemenin ağırlığına eşit olan kaynak miktarına eşittir. Kısıt seti (45), süper düğüm dışındaki düğümler için farklı varış noktalı her tipteki malzeme için akış dengesi kısıtlarıdır. Süper düğüm dışındaki herhangi bir i düğümünden çıkış yapan k düğümü varışlı malzeme akış miktarı, süper düğümden gelen akış ile süper düğüm dışındaki düğümlerden gelen akış toplamından, i düğümündeki talep miktarının ($i = k$ için) çıkarılması ile elde edilen değere eşittir. $i \neq k$ için, i düğümü geçiş düğümü olarak hareket eder. $i = k$ için, k düğümü varışlı malzemenin i düğümünden çıkışı yoktur. Kısıt seti (46), doğrudan süper düğümden talebi karşılanan düğüm sayısının p olmasını sağlar. Kısıt seti (47), yerleşim durumunu gösteren y_j karar değişkenleri ile akış karar değişkenleri x_{ijk} 'yi ilişkilendirir. Kısıt seti (48) ve (49), karar değişkenlerini tanımlar. Modelin yapısı gereği, x_{ijk} değişkenleri gerçek sayı olarak tanımlanmış olsa da, tamsayı değerler olacaktır.

ÇMATP'deki kısıt sayısı, $2n^2+n+1$; ikil ve gerçek değişken sayısı ise, sırasıyla, n ve $(2|E|+n)n$ 'dir. Tam serimlerde, $2|E|$, $n(n-1)$ 'ye eşit olabileceği için, gerçek değişken sayısı $O(n^3)$ olabilir. Fakat gerçek değişken sayısını, $O(n^3)$ 'den $O(n^2)$ 'ye düşürmek mümkündür. Şimdi söz konusu iyileştirme açıklanacaktır.

İndirgenmiş Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Ortanca Modeli (ÇMATP-R)

Her talep düğümü k için, $T_k = (N, A_k)$, N 'deki tüm düğümleri kapsayan, k düğümünde köklü en kısa yol arboresence'ı olsun. Ayrıt seti A_k , k kök düğümünden başka bir düğüme giden

arborescence'ta yer alan yönlü yolların en azından birinde yer alan ayrıtları kapsar.

$T_k^* = (N, A_k^*)$, $T_k = (N, A_k)$ 'deki ayrıtları ters yöne çevirerek elde ettiğimizi varsayalım.

Yani, $A_k^* \equiv \{(j, i) : (i, j) \in A_k\}$. $T_k^* = (N, A_k^*)$ 'deki tüm yönlü yollar, k düğümünde sona erer.

ÇMATP'nin bir optimal çözümünde, k düğümünün u düğümünden hizmet aldığını varsayalım.

Eğer $u \neq k$ ise, $T_k^* = (N, A_k^*)$ 'deki tek yol $P(u, k)$, u 'da başlayan ve k 'de sona eren

$G^* = (N^*, A^*)$ 'daki en kısa yoldur. Eğer k tipi malzeme ile ilişkili x_{ijk} değişkenlerini, A_k^* ve

$A_0 \equiv \{(0, j) : j \in N\}$ için tanımlarsak, optimalitede bir kayıp meydana gelmez. Bunun sebebi, u ve k düğümleri arasında en az bir kısa yolun kalmasıdır. ÇMATP'nin indirgenmiş versiyonu, aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Model R-ÇMATP: İndirgenmiş Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Ortanca Modeli

$$z^* = \min_{x, y} \sum_{k \in N} \sum_{(i, j) \in A_k^*} l_{ij} x_{ijk} \quad (50)$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{j \in N} x_{0jk} = w_k \quad k \in N \quad (51)$$

$$\sum_{j: (i, j) \in A_k^*} x_{ijk} - \sum_{j: (j, i) \in A_k^* \cup A_0} x_{jik} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq k \\ -w_k & \text{if } i = k \end{cases} \quad i, k \in N \quad (52)$$

$$\sum_{j \in N} y_j = p \quad (53)$$

$$x_{ojk} - w_k y_j \leq 0 \quad j, k \in N \quad (54)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad (i, j) \in A_k^* \cup A_0, k \in N \quad (55)$$

$$y_j \in [0, 1] \quad j \in N \quad (56)$$

$T_k^* = (N, A_k^*)$ 'deki ağaçlar, herhangi bir en kısa yol algoritması (örneğin, Dijkstra Algoritması) kullanılarak hesaplanabilir. Proje kapsamında, $G = (N, A)$ üzerinde, n adet tek-malzemeli akış problemi çözmek suretiyle bulunmuştur. Bunun sebebi, gerçek yol uzunluklarını

hesaplamadan A_k^* 'deki ayrıtları sağlamasıdır. Bunun için, k 'ninci tek-malzemeli akış modelinde, k düğümünde $n-1$ birim malzeme olduğu ve $N \setminus \{k\}$ 'deki düğümlerde ise 1 birim talep olduğu kabul edilmiştir. $(i, j) \in A$ 'daki ayrıtlara, l_{ij} uzunlukları atanır. k malzemesi için kullanılan minimum maliyet akış modeli SP_k , aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Model SP_k : En Kısa Yol Minimum Akış Modeli

$$z_k^* = \min_y \sum_{(i, j) \in A^*} l_{ij} y_{ij} \quad (57)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{(k,j) \in A^*} y_{kj} = n - 1 \quad (58)$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A^*} y_{ij} - \sum_{j:(j,i) \in A^*} y_{ji} = -1 \quad i \in N, i \neq k \quad (59)$$

$$y_{ij} \geq 0 \quad i, j \in N \quad (60)$$

SP_k , her $k \in N$ için çözüldüğünde, pozitif y_{ij} değerleri, k düğümü için en kısa yol arboresence $T_k=(N, A_k)$ 'yi verir. A_k 'daki ayrıtların yönü değiştirildiğinde, A_k^* elde edilir.

ÇMATP ve R-ÇMATP, ticari çözücüler ile belirli boyuttaki problemlerin çözümü için kullanılmıştır. Ancak problem boyutları büyüdüğünde, bellek sorunları yaşanmıştır. Bu nedenle, modelin ayrıştırılmasının uygun olacağı değerlendirilerek Benders Algoritması geliştirilmiştir.

R-ÇMATP için Benders Algoritması

Benders Algoritmasındaki temel düşünce, bazı değişkenleri ve problemin ilgili kısıtlarını, geriye kalan problemin çözümü orjinal problemden daha kolay olacak şekilde ayrıştırmaktır. Bu amaçla model, alt problem ve ana problem olmak üzere ikiye ayrıştırılır. Ana probleme alt problemden, alt probleme ana problemden elde edilen çözüm bilgisi aktarılarak, problemler iteratif olarak çözülür. Aşağıda algoritmanın detayları açıklanmıştır.

ÇMATP modelindeki tamsayı y değişkenleri, h iterasyonunda y^h olarak sabitlenerek aşağıdaki *alt problem SP* (subproblem) elde edilir.

$$z^* = \min_{x,y} \sum_{k \in N} \sum_{(i,j) \in A_k^*} l_{ij} x_{ijk} \quad (61)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in N} x_{0jk} = w_k \quad k \in N \quad (62)$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A_k^*} x_{ijk} - \sum_{j:(j,i) \in A_k^* \cup A_0} x_{jik} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq k \\ -w_k & \text{if } i = k \end{cases} \quad i, k \in N \quad (63)$$

$$\sum_{j \in N} y_j^h = p \quad (64)$$

$$x_{0jk} - w_k y_j^h \leq 0 \quad j, k \in N \quad (65)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad (i, j) \in A_k^* \cup A_0, k \in N \quad (66)$$

SP'deki (62), (63) ve (64) kısıtlar için e_k , f_{ik} ve g_{jk} dual değişkenleri tanımlanırsa, aşağıdaki dual SP problemi elde edilir.

$$z^* = \max_{e_k, f_{ik}, g_{jk}} \sum_{k \in N} w_k e_k + \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} b_k f_{ik} + \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} w_k y_j^h g_{jk} \quad (67)$$

$$\text{s.t.} \quad e_k - f_{jk} + g_{jk} \leq 0 \quad i = 0, j, k \in N \quad (68)$$

$$f_{ik} - f_{jk} \leq l_{ij} \quad i \neq 0, j, k \in N \quad (69)$$

$$f_{ik} g_{jk} \leq 0 \quad i, j, k \quad (70)$$

Her bir iterasyonda, Ana Problem MP'yi (Master Problem) iyileştirmek için amaç fonksiyonu () kullanılarak iki tip Benders kesiti elde edilir. Dual SP'nin sınırsız bir çözüme sahip olması, ana sub problemin çözümsüz olduğu anlamına gelmektedir ve bu durumda bir olurluluk kesiti oluşturmak ve eklemek gerekmektedir. Bu amaçla h iterasyonunda, kısıt () eklenir.

$$\sum_{k \in N} w_k e_k^h + \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} b_{ik} f_{ik}^h + \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} w_k y_j g_{jk}^h \leq 0 \quad (71)$$

Eğer dual SP sınırlı ise yani primal SP olurlu ise, optimalite kesiti () MP'ye eklenir.

$$\eta \geq \sum_{k \in N} w_k e_k^h + \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} b_{ik} f_{ik}^h + \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} w_k y_j g_{jk}^h \quad (72)$$

Bu durumda, MP aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\min \eta \quad (73)$$

$$\eta \geq \sum_{k \in N} w_k e_k^h + \sum_{i \in N} \sum_{k \in N} b_{ik} f_{ik}^h + \sum_{j \in N} \sum_{k \in N} w_k y_j g_{jk}^h \quad (74)$$

s.t

$$\sum_{j \in N} y_j = p \quad (75)$$

$$x_{ojk} - w_k y_j \leq 0 \quad j, k \in N \quad (76)$$

$$y_j \in [0, 1] \quad j \in N \quad (77)$$

MP'ye, optimalite kısıtına ilave olarak, olursuz çözümleri önlemek için () ve ()'uncü kısıtlar eklenmiştir.

Benders Algoritmasının adımları aşağıda verilmiştir.

Algoritma Benders-R-ÇMATP:

Adım 1: (Başlangıç)

Başlangıç çözümü için y değişkenlerine değerler atanarak sabitlenir.

Altsınır (LB) = $-\infty$

Üstsınır (UB) = $+\infty$

Adım 2: Eğer LB=UB ise dur. Optimal çözüm elde edilmiştir. LB \neq UB ise Adım 3'e git.

Adım 3: Dual SP'yi çöz. UB = $\min(UB, z_{SP}^c)$.

Adım 4: MP'ye yeni bir optimalite kesiti ekle ve MP'yi çöz.

Adım 5: LB = z_{MP}^c olarak güncelle. y değişkenlerinin değerini güncelle ve Adım 2'ye git.

3.2. Ayrırt Kapasiteli p-Ortanca Problemi

Ayrırt kapasiteli p-ortanca problemi, yukarıda açıklanan serim yapısı ve ÇMATP esas alınarak kolaylıkla modellenabilir. cap_{ij} , $\{i,j\}$ ayrırtının kapasitesi olarak tanımlanırsa, ayrırt kapasiteli p-ortanca problemi, aşağıdaki şekilde formüle edilebilir. Dikkat edileceği üzere, ayrırtlar üzerinde kapasite kısıtları olduğu için, problemin modellenmesinde, R-ÇMATP değil ÇMATP esas alınmıştır.

Model AKÇMATP: Ayrırt Kapasiteli Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Ortanca Modeli

Amaç fonksiyonu (43) ve Kısıtlar (44) - (49) 'e ilave olarak,

$$\sum_k x_{ijk} + \sum_k x_{jik} \leq cap_{ij} \quad \{i,j\} \in E \quad (78)$$

AKÇMATP, literatürdeki ilk ayrırt kapasiteli p-ortanca modelidir. Model, CPLEX kullanılarak çözüldüğünde, belirli boyuttaki problemler için çözümler elde edilmiştir. Ancak, büyük çaplı problemlerin çözülmesinde sorunlar yaşanmıştır. Bu kapsamda, çözümü zorlaştıran kapasite kısıtını gevşetecek şekilde bir Lagrangean Algoritması geliştirilmiştir.

AKÇMATP İçin Bir Lagrangean Algoritması

Lagrangean Gevşetmesi farklı kısıtlar üzerinde uygulanabilir. Burada, problemin çözülmesini zorlaştıran (78) numaralı kısıtlar üzerinde Lagrangean gevşetmesi uygulanmıştır.

$u_{ij} \geq 0$ için Lagrangean Gevşetmesi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$L(u) = \min_{x,y} \sum_{k \in N} \sum_{(i,j) \in A_k^*} l_{ij} x_{ijk} + \sum_{\{i,j\} \in E} u_{ij} \left[\sum_k x_{ijk} + \sum_k x_{jik} - cap_{ij} \right] \quad (79)$$

() - () numaralı kısıtlar.

$L(u) \leq z^*$ olduğu bilinmektedir. En iyi altsınırın elde edilmesi için Lagrangean Dual olarak

isimlendirilen $\max_{u \geq 0} L(u)$ 'nun çözülmesi gerekir.

$L(u)$, parçalı doğrusal bir fonksiyondur. Bu nedenle, $\max_{u \geq 0} L(u)$ 'yu çözmek türevlenemeyen bir optimizasyon problemidir. Çalışma kapsamında, problemi çözmek için Altgradyan Optimizasyon tekniği kullanılmıştır.

Algoritma AKÇMATP-Lagrange:

{Girdi}

Üst sınır L^*

Başlangıç değerleri $u^0 \geq 0$ (Lagrangean Gevşetme kısıtına karşılık gelen dual değişken değerleri)

{Başlangıç}

$$\theta_0^1 := 2$$

$$L_{best} = -\infty$$

{Altgradyan iterasyonları}

for $t := 0, 1, \dots$, tekrarla

$$g_1^t := g_1(x^t, y^t) \quad \{L(u^t)\text{'nin gradyanı}\}$$

$$s_t^1 := \theta_t^1 (L^* - L(u^t)) / \|g_1^t\|^2 \quad \{\text{adım büyüklüğü}\}$$

$$u^{t+1} := \max\{0, u^t + s_t^1 g_1^t\}$$

Eğer $\|u^{t+1} - u^t\| < \varepsilon$ ise

Dur

Eğer K iterasyon sonunda gelişme olmazsa

$$\theta_{t+1}^1 := \theta_t^1 / 2$$

Aksi durumda

$$\theta_{t+1}^1 := \theta_t^1$$

$$t := t + 1$$

Dur

3.3. Düşüm Kapasiteli p-Ortanca Problemi

Düşüm kapasiteli p-ortanca problemi için iki model geliştirilmiştir. Birinci model DKÇMATP1, ÇMATP çatısı üzerine kapasite kısıtı eklemek suretiyle elde edilmiştir. İkinci model DKÇMATP2, esas olarak ÇMATP ile aynı altyapıyı ve yaklaşımı kullanmakla beraber, değişken tanımlarında değişiklik yapılmıştır. DKÇMATP2'de, DKÇMATP1'de reel sayı olarak tanımlanan akış değişkenleri, ikili tam sayı değişken olarak tanımlanmıştır. Bu bağlamda, DKÇMATP1'de bir talep noktasının talebinin birden fazla tesisten karşılanmasına müsaade edilirken DKÇMATP2'de sadece bir tesisten talebin karşılanmasına müsaade edilmiştir. DKÇMATP'nin modellenmesinde, R-ÇMATP esas alınmıştır. Diğer bir ifadeyle, modellerde akış değişkenlerinin sayısı yukarıda açıklandığı şekilde indirgenebilir.

Bir düşümün kapasitesini W_j olarak tanımlarsak, modeller DKÇMATP1 ve DKÇMATP2 aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

Model DKÇMATP1: Düşüm Kapasiteli Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Ortanca Modeli 1

Amaç fonksiyonu () ve Kısıtlar () – ()'ya ilave olarak,

$$\sum_k x_{ojk} \leq W_j \quad j \in N \quad (80)$$

DKÇMATP, CPLEX kullanılarak çözüldüğünde, belirli boyuttaki problemler için çözümler üretilebilmektedir. Ancak, büyük çaplı problemler için özel algoritmaların geliştirilmesine

ihtiyaç duyulmaktadır. Bu kapsamda, ilk adım olarak, Lagrangean gevşetmesinin kullanılmasına karar verilmiştir.

DKÇMATP1 İçin Bir Lagrangean Algoritması

Lagrangean Gevşetmesi farklı kısıtlar üzerinde uygulanabilir. Burada, problemin çözülmesini zorlaştıran () numaralı kısıtlar üzerinde Lagrangean gevşetmesinin uygulanması açıklanacaktır.

$v_j \geq 0$ için Lagrangean Gevşetmesi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$L(v) = \min_{x,y} \sum_{k \in N} \sum_{(i,j) \in A_k^*} l_{ij} x_{ijk} + \sum_j v_j \left[\sum_k x_{ojk} - W_j \right] \quad (81)$$

() - () numaralı kısıtlar.

$L(v) \leq Z^*$ olduğu bilinmektedir. En iyi altsınırın elde edilmesi için Lagrangean Dual olarak

isimlendirilen $\max_{v \geq 0} L(v)$ 'nun çözülmesi gerekir.

$L(v)$, parçalı doğrusal bir fonksiyondur. Bu nedenle, $\max_{v \geq 0} L(v)$ 'yu çözmek türevlenemeyen bir optimizasyon problemidir. Bu problemi çözmek için kullanılan önemli tekniklerden biri, Altgradyan Optimizasyon tekniğidir.

Algoritma DKÇMATP1-Lagrange: {Girdi}

Üst sınır L^*

Başlangıç değerleri $v^0 \geq 0$ (Lagrangean Gevşetme kısıtına karşılık gelen dual değişken değerleri)

{Başlangıç}

$$\theta_0^2 := 2$$

$$L_{best} = -\infty$$

{Altgradyan iterasyonları}

for $t := 0, 1, \dots$, tekrarla

$$y_2^t := g_2(x^t, y^t) \quad \{L(v^t) \text{ 'nin gradyanı}\}$$

$$s_t^2 := \theta_t^2 (L^* - L(v^t)) / \|y_2^t\|^2 \quad \{\text{adım büyüklüğü}\}$$

$$v^{t+1} := \max\{0, v^t + s_t^2 y_2^t\}$$

Eğer $\|v^{t+1} - v^t\| < \varepsilon$ ise

Dur

Eğer K iterasyon sonunda gelişme olmazsa

$$\theta_{t+1}^2 := \theta_t^2 / 2$$

Aksi durumda

$$\theta_{t+1}^2 := \theta_t^2$$

$$t := t + 1$$

Dur

Model DKÇMATP2: Düğüm Kapasiteli Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Ortanca Modeli 2

$$z^* = \min_x \sum_{k \in D} \sum_{(i,j) \in A^*} w_k l_{ij} x_{ijk} \quad (82)$$

$$s.t. \quad \sum_{j \in F} x_{0jk} = 1 \quad k \in D \quad (83)$$

$$\sum_{j:(i,j) \in A^*} x_{ijk} - \sum_{j:(j,i) \in A^*} x_{jik} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq k \\ -1 & \text{if } i = k \end{cases} \quad i \in N, k \in D \quad (84)$$

$$\sum_{j \in F} y_j = p \quad (85)$$

$$x_{ojk} - y_j \leq 0 \quad j \in F, k \in D \quad (86)$$

$$\sum_{k \in D} w_k x_{0jk} - W_j y_j \leq 0 \quad j \in F \quad (87)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad (i,j) \in A, k \in D \quad (88)$$

$$x_{0ik} \in \{0,1\} \quad i \in F, k \in D \quad (89)$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad j \in F \quad (90)$$

DKÇMATP2 İçin Benders Ayrıştırma Algoritması

DKÇMATP2'deki tam sayılı değişkenlerin değerleri, h iterasyonunda $y = y^h$ ve $x_{0ik} = x_{0ik}^h$ olarak sabitlenerek aşağıdaki alt problem SP elde edilir.

$$z_{sp} = \min_{x,y} \sum_{k \in D} \sum_{(i,j) \in A^*} w_k l_{ij} x_{ijk} \quad (91)$$

$$s.t. \quad \sum_{j:(i,j) \in A^*} x_{ijk} - \sum_{j:(j,i) \in A^*} x_{jik} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq k \\ -1 & \text{if } i = k \end{cases} \quad i \in N, k \in D \quad (92)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad (i,j) \in A^*, k \in D \quad (93)$$

() numaralı kısıtlar için a_{lik} dual değişkenlerini tanımlarsak, dual SP problemi aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$z_{dsp} = \min \sum_{k \in D} \sum_{i \in N} x_{0ik}^h a_{0ik} \quad (94)$$

$$\text{s.t.} \quad a_{0ik} - a_{0jk} \leq l_{ij} w_k \quad (i, j) \in A^i, k \in D \quad (95)$$

$$a_{0ik} - a_{0jk} \leq l_{ji} w_k \quad (i, j) \in A^i, k \in D \quad (96)$$

Her bir iterasyonda, Ana Problem MP'yi iyileştirmek için amaç fonksiyonu (94) kullanılarak iki tip Benders kesiti elde edilir. Dual SP'nin sınırsız bir çözüme sahip olması, ana sub problemin çözümsüz olduğu anlamına gelmektedir ve bu durumda bir olurluluk kesiti oluşturmak ve eklemek gerekmektedir. Bu amaçla h iterasyonunda, kısıt () eklenir.

$$\sum_{k \in D} \sum_{l \in N_0, i \in N} x_{lik} a_{lik}^h \leq 0 \quad (97)$$

Eğer dual SP sınırlı ise yani primal SP olurlu ise, optimalite kesiti (), MP'ye eklenir.

$$\eta \geq \sum_{k \in D} \sum_{l \in N_0, i \in N} x_{lik} a_{lik}^h \quad (98)$$

Bu durumda, MP aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\text{Min } \eta \quad (99)$$

$$\text{s.t.} \quad \eta \geq \sum_{k \in D} \sum_{l \in N_0, i \in N} x_{lik} a_{lik}^h \quad (100)$$

$$\sum_i y_i = p \quad i \in (N) \quad (101)$$

$$x_{0jk} \leq y_j \quad j \in F, k \in D \quad (102)$$

$$\sum_{k \in D} w_k x_{0jk} - W_j y_j \leq 0 \quad j \in F \quad (103)$$

MP'ye, optimalite kısıtına ilave olarak, olursuz çözümleri önlemek için () - () numaralı kısıtlar eklenmiştir.

Benders Algoritmasının adımları aşağıda verilmiştir.

Algoritma Benders-DKÇMATP2:

Adım 1: (Başlangıç)

Başlangıç çözümü için y değişkenlerine değerler atanarak sabitlenir.

Altsınır (LB) = $-\infty$

Üstsınır (UB) = $+\infty$

Adım 2: Eğer LB=UB ise dur. Optimal çözüm elde edilmiştir. LB \neq UB ise Adım 3'e git.

Adım 3: Dual SP'yi çöz. UB = $\min(\text{UB}, z_{SP}^i)$.

Adım 4: MP'ye yeni bir optimalite kesiti ekle ve MP'yi çöz.

Adım 5: LB = z_{MP}^i olarak güncelle. y değişkenlerinin değerini güncelle ve Adım 2'ye git.

3.4. Karma Kapasiteli p-Ortanca Problemi

Karma kapasiteli p-ortanca problemi için, ayrıt ve düğüm kapasitelerini temel modele eklemek suretiyle KKÇMATP modeli geliştirilmiştir.

Model KKÇMATP: Karma Kapasiteli Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Ortanca Modeli

Amaç fonksiyonu (z) , Kısıtlar $(1) - (4)$, (5) ve (6)

KKÇMATP, CPLEX kullanılarak çözüldüğünde, belirli boyuttaki problemler için çözümler üretilebilmektedir. Ancak, büyük çaplı problemler için özel algoritmaların geliştirilmesine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu kapsamda, ilk adım olarak, Lagrangean gevşetmesinin kullanılmasına karar verilmiştir.

KKÇMATP İçin Bir Lagrangean Algoritması

Lagrangean Gevşetmesi farklı kısıtlar üzerinde uygulanabilir. Burada, problemin çözümlerini zorlaştıran (1) ve (2) numaralı kısıtlar üzerinde Lagrangean gevşetmesinin uygulanması açıklanacaktır.

$u_{ij} \geq 0$ ve $v_j \geq 0$ için Lagrangean Gevşetmesi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$L(u, v) = \min_{x, y} \sum_{k \in N} \sum_{(i, j) \in A_k^*} I_{ij} x_{ijk} + \sum_{\{(i, j) \in E\}} u_{ij} \left[\sum_k x_{ijk} + \sum_k x_{jik} - cap_{ij} \right] + \sum_j v_j \left[\sum_k x_{ojk} - W_j \right] \quad (104)$$

$(1) - (2)$ numaralı kısıtlar.

$L(u, v) \leq z^*$ olduğu bilinmektedir. En iyi altsınırın elde edilmesi için Lagrangean Dual olarak

isimlendirilen $\max_{u \geq 0, v \geq 0} L(u, v)$ 'nin çözülmesi gerekir.

$L(u, v)$, parçalı doğrusal bir fonksiyondur. Bu nedenle, $\max_{u \geq 0, v \geq 0} L(u, v)$ 'yu çözmek türevlenemeyen bir optimizasyon problemidir. Bu problemi çözmek için kullanılan önemli tekniklerden biri, Altgradyan Optimizasyon tekniğidir.

Algoritma KKÇMATP-Lagrange:

{Girdi}

Üst sınır L^*

Başlangıç değerleri $u^0 \geq 0, v^0 \geq 0$ (Lagrangean Gevşetme kısıtına karşılık gelen dual değişken değerleri)

{Başlangıç}

$$\theta_0^1 := 2$$

$$\theta_0^2 := 2$$

$$L_{best} = -\infty$$

{Altgradyan iterasyonları}

for $t := 0, 1, \dots$, tekrarla

$$y_1^t := g_1(x^t, y^t)$$

$$y_2^t := g_2(x^t, y^t)$$

$$s_t^1 := \theta_t^1 (L^* - L(u^t, v^t)) / \|y_1^t\|^2$$

$$s_t^2 := \theta_t^2 (L^* - L(u^t, v^t)) / \|y_2^t\|^2$$

$$u^{t+1} := \max\{0, u^t + s_t^1 y_1^t\}$$

$$v^{t+1} := \max\{0, v^t + s_t^2 y_2^t\}$$

Eğer $\|u^{t+1} - u^t\| < \varepsilon$ ve $\|v^{t+1} - v^t\|$ ise

Dur

Eğer K iterasyon sonunda gelişme olmazsa

$$\theta_{t+1}^1 := \theta_t^1 / 2, \quad \theta_{t+1}^2 := \theta_t^2 / 2,$$

Aksi durumda

$$\theta_{t+1}^1 := \theta_t^1, \quad \theta_{t+1}^2 := \theta_t^2$$

$t := t+1$

Dur

3.5. Kapasitesiz p-Hub Ortanca Problemi

p-hub ortanca problemi ve uzantıları, çok malzemeli akış tabanlı bir model üzerine kurulmuştur. Bunun için, serim yapısı özel bir şekilde düzenlenmiştir. İlk olarak, serim yapısı açıklanacak ve müteakiben geliştirilen modeller verilecektir.

Gerçek serim (GS) $G = (N, E)$, düğüm kümesi $N = \{1, \dots, n\}$ ve (yönsüz) ayrıt kümesi E olan bir serim olsun. Düğüm kümesi içinde bir S alt kümesinin, talep ürettiğini varsayalım.

Eğer i düğümü S 'de ise, en azından bir $j \in N - \{i\}$ düğümü için w_{ij} kadar bir akış üretir.

D_i , $w_{ij} > 0$ olan j düğümler kümesi olsun. $i \in S$ için, D_i tanımlı ve boş değildir. D 'yi,

$D_i, i \in S$ 'lerin bileşimi olarak tanımlayalım. Birçok düğüm, aynı anda hem S hem de D

içinde olabilir. Problem, S 'de bulunan düğümlerden D 'de bulunan düğümlere, yerleri

belirlenecek olan hub düğümleri vasıtasıyla, w_{ij} akışlarını göndermektir. Burada, i ve j

düğümleri arasındaki mesafe l_{ij} olarak tanımlanır. l_{ij} değerleri, i ve j arasındaki direkt yol

uzunluklarıdır ve yukarıda tanımlanan d_{ij} değerlerinden farklıdır. l_{ij} değerleri, sadece i ve

j arasında direkt bir yol varsa, yani $\{i, j\}$ ayrıtı için, tanımlıdır. d_{ij} değerleri, i ve j

arasında doğrudan bir yol olmasa dahi tanımlıdır ve i 'den j 'ye diğer düğümler vasıtasıyla gidilen en kısa yolun uzunluğu olarak hesaplanır.

Modelde, hub olarak kullanılabilir düğümlerin belirlenmesinde farklı bir yaklaşım kullanılmıştır. Literatürdeki modellerde, hub olarak kullanılabilir düğümler, doğrudan belirlenir. Önerilen yapıda ise, hub olarak kullanılabilir düğüm kümesi, özel, büyük kapasiteli araçların kullanımının mümkün olduğu yol sistemi esas alınarak belirlenir. Bu nedenle, ayrıt kümesi içinden, yüksek kapasiteli araçların kullanımı için uygun olan yolları

içeren (örneğin, otoyollar) bir E^* alt kümesi belirlenir. E^* 'deki en az bir ayrıta dokunan düğümleri, N^* olarak tanımlayalım. Potansiyel hub düğümlerini N^* veya fiziksel, yönetsel veya hukuki sebeplerden dolayı N^* 'nin bir alt kümesi H olarak belirleyebiliriz.

$G^* = (N^*, E^*)$, hub düğümden hub düğüme ulaşımın yapılabileceği ayrıtları içeren G 'nin alt serimi olsun. Şekil 3'te örnek bir GS verilmiştir. Serim üzerindeki kesikli çizgiler ve numaralı

düğümler, sırasıyla, E^* 'deki ayrıtları ve N 'deki düğümleri temsil etmektedir. $H = N^*$

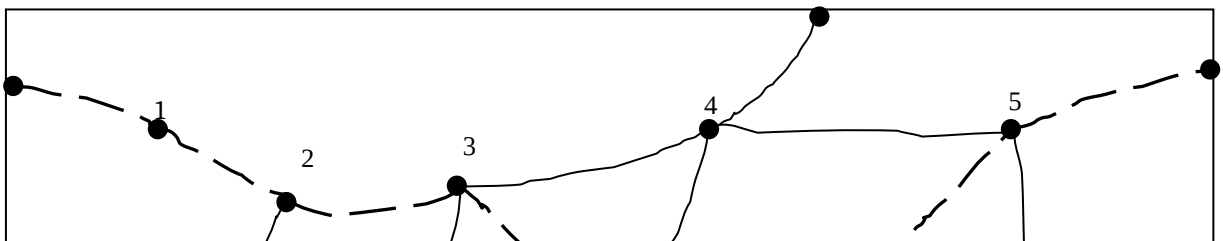
varsayımıyla, $\{1, 2, 3, 20, 21, 11, 12\} \cup \{5, 19, 21, 18, 13\} \cup \{15, 14, 13, 12, 10, 8\}$, Şekil 3'teki potansiyel hub düğümlerini oluşturmaktadır.

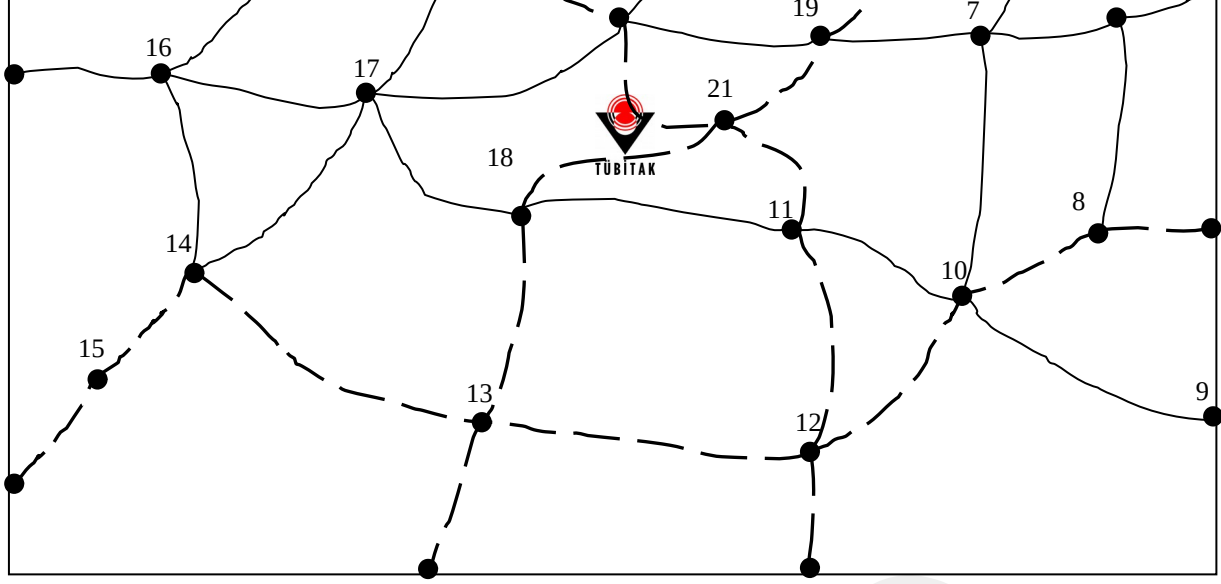
l_{ij} , $[i, j]$ ayrıtlarının uzunluğu; χ_{ij} , α_{ij} ve δ_{ij} , sırasıyla, $[i, j]$ ayrıtı üzerinde bir birim mesafe başına bir birim akışın, toplama, transfer ve dağıtım maliyeti olsun. Hub düğümleri arasındaki

ölçek ekonomisini modellemek için, $[i, j]$ ayrıtı için $\alpha_{ij} \leq \chi_{ij}$ ve $\alpha_{ij} \leq \delta_{ij}$ koşulu geçerli olsun.

χ_{ij} , α_{ij} ve δ_{ij} değerlerinin hesaplanmasında, maliyet azaltımları dahil, $[i, j]$ ayrıtı üzerindeki maliyeti etkileyen tüm faktörlerin dahil edildiği kabul edilmektedir. Maliyetlerin bu şekilde tanımlanması, sadece köprü ayrıtlarına (iki hub düğümünü birleştiren fakat maliyet azaltımının uygulanmadığı ayrıtlar) değil farklı maliyet değerlerine sahip ayrıtların tanımlanmasına da imkan vermektedir. Bu durumda problem, maliyeti minimize edecek

şekilde, $H \subseteq N^*$ kümesi içinden P adet düğüm seçmek ve S 'den D 'ye en az bir hub düğümünü ziyaret eden rotaları bulmaktır.





Şekil 3. Gerçek serim yapısı için örnek serim

Problem, birinci katmanı toplama, ikinci katmanı transfer ve üçüncü katmanı dağıtım bileşenlerini temsil eden üç katmanlı bir serim üzerinde, yan kısıtları olan çok malzemeli akış problemi olarak modellenmiştir. Bunun için, serim yönlü hale getirilmiştir. Yani, her bir yönsüz

ayrıt $\{i, j\} \in E$ için, $l_{ij} = l_{ji}$ olacak şekilde, (i, j) ve (j, i) yönlü ayrıtları eklenmiştir.

$G = (N, A)$ 'dan, birinci katmanı temsil eden $G_1 = (N_1, A_1)$ ve üçüncü katmanı temsil eden

$G_3 = (N_3, A_3)$ olmak üzere iki kopya üretilmiştir. Burada, $N_1 = \{11, 12, \dots, 1n\}$,

$N_3 = \{31, 32, \dots, 3n\}$, $A_1 = \{(1i, 1j) : (i, j) \in A\}$ ve $A_3 = \{(3i, 3j) : (i, j) \in A\}$ olarak

tanımlanmıştır. $(1i, 1j)$ ve $(3i, 3j)$ ayrıtlarının uzunlukları, l_{ij} 'dir. Transfer katmanı

$G_2 = (N_2, A_2)$, E^* 'deki ayrıtlar ile tanımlanır. Orta katmanda, $A^* \equiv \{(i, j) \in A : \{i, j\} \in E^*\}$

olmak üzere, $A_2 = A^*$ ve $N_2 = N^*$ 'dir. Yani, her bir yönsüz ayrıt $\{i, j\} \in E^*$ yerine, iki yönlü

ayrıt (i, j) ve (j, i) konur. G_1 , G_2 ve G_3 katmanları, her bir $i \in H$ için, $(1i, 2i)$ ve $(2i, 3i)$

şeklindeki ayrıtlarla birbirine bağlanır. $A_{12} = \{(1i, 2i) : i \in H\}$ ve $A_{23} = \{(2i, 3i) : i \in H\}$ olarak

tanımlanırsa, modelde kullanılan nihai serim, $N_0 = N_1 \cup N_2 \cup N_3$ ve $A_0 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_{12} \cup A_{23}$ olan $G_0 = (N_0, A_0)$ 'dir. Dikkat edilirse, $G_0 = (N_0, A_0)$ GS üzerinde tanımlı MS serimidir.

Her bir arz noktası $i \in S$ 'nin farklı bir malzeme için kaynak olduğunu düşünerek $|S|$ adet farklı malzeme tanımlayalım. $G_1 = (N_1, A_1)$ 'deki düğümler kaynak noktaları ve $G_3 = (N_3, A_3)$ 'teki noktalar talep noktalarıdır. Hem kaynak hem de talep noktası olan i düğümü, G_1 'de $1i$ olarak kaynak düğümü ve G_3 'te $3i$ olarak talep düğümü rolünü üstlenir.

$i \in S$ ($1i \in N_1$) için, kaynak düğümden gönderilmesi gereken toplam akış miktarını

$W_i = \sum_{j \in D_i} w_{ij}$ olarak tanımlayalım. Ayrıca, her bir $i \in S$ için, $1i \in N_1$ düğümünde i malzemesi kaynağının W_i olduğunu varsayalım. Tüm diğer malzemeler $i' \in S, i' \neq i$ için, $1i$ düğümündeki kaynak miktarı sıfırdır. Her bir talep noktası $j \in D$ için, $3j \in N_3$ düğümünde, i malzemesine olan talep w_{ij} 'dir.

Şekil 4'te, 5 düğümlük bir serimden elde edilen, 3 katmanlı MS serimi görülmektedir. Şekilde, $E^* = \{\{4,5\}, \{3,4\}, \{2,4\}\}$, $N^* = \{2,3,4,5\}$ ve $H = \{3,4,5\}$ 'dir. G_2 , bağlı olmayabilir. Nihai serimdeki akışlar ve serim yapısı, buna duyarlı değildir.

a ayrıtı üzerindeki bir birim akış maliyeti c_a , aşağıdaki şekilde tanımlanabilir ($\chi_{ij} = \chi_{ji}$, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, ve $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ olduğu kabul edilmiştir ama gerekli bir koşul değildir.):

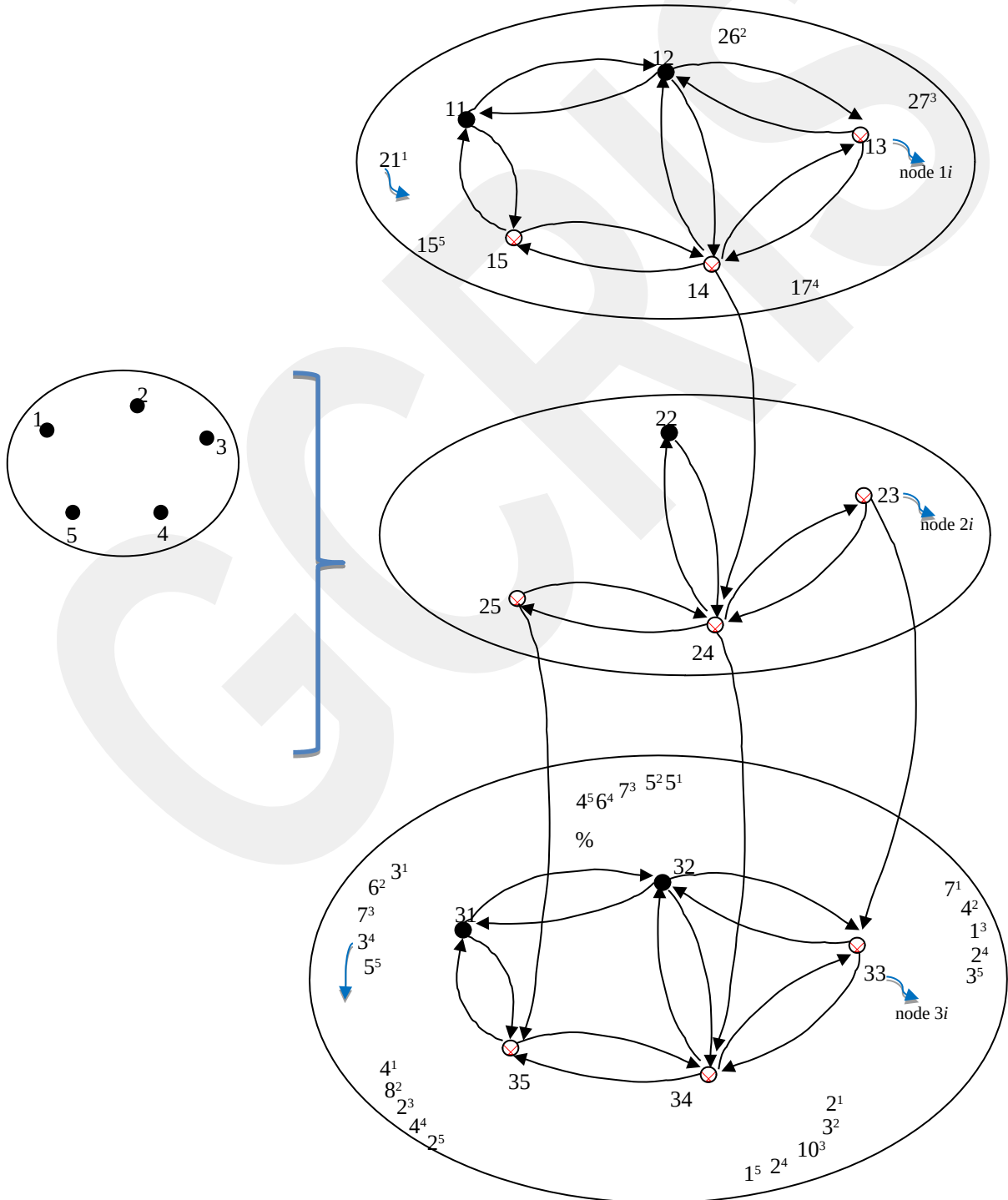
$$c_a = \begin{cases} \chi_{ij} \times I_{ij} & \text{if } a = (1i, 1j), (i, j) \in A \\ \alpha_{ij} \times I_{ij} & \text{if } a = (2i, 2j), (i, j) \in A^* \\ \delta_{ij} \times I_{ij} & \text{if } a = (3i, 3j), (i, j) \in A \\ 0 & \text{if } a = (1i, 2i) \text{ or } a = (2i, 3i), i \in H \end{cases}$$

Akış modelinde, N_0 'daki her bir düğüm ve her bir k için, akış dengesi kısıtı tanımlıdır.

$\sum_{i \in H} y_i = p$ kısıtı ile p adet hub noktası seçilir. Dik ayrıtlardaki akışlara (A_{12} ve A_{23} 'teki

akışlar), sadece ve sadece ayrıtların düğümleri hub olarak tayin edilirse müsaade edilir. Yani, $(1i,2i)$ ve $(2i,3i)$ ayrıtları üzerindeki akışlar, sadece $y_i = 1$ olduğunda mümkün olur.

β , N_0 'ın herhangi bir düğümü olsun. Notasyonu sadeleştirmek için, eğer $i \in S$ için $\beta = 1i$ ise $\beta \in S$ ve $i \in D$ için $\beta = 3i$ ise $\beta \in D$ olarak ifade edilir. Aynı şekilde, $i \in H$ için $\beta = 2i$ ise $\beta \in H$ ve $i \in N^*$ için $\beta = 2i$ ise $\beta \in N_2$ olarak ifade edilir.



Şekil 4. $E^* = \{ \{4,5\}, \{3,4\}, \{2,4\} \}$, $N^* = \{2,3,4,5\}$, $H = \{3,4,5\}$, ve $S=D = \{1,2,3,4,5\}$ olan GS'den elde edilen üç katmanlı MS serimi

β düğümünde k malzemesi ihtiyacı $b_{\beta k}$; $\beta = 1i$, $i \in S$, ise, $W_{\beta} = \sum_{j:w_{ij}>0} w_{ij}$, $\beta = 3j$, $j \in D$,
ise $-w_{k\beta} = -w_{kj}$ olarak tanımlanır. Diğer tüm düğümler ve $k \in S$ için, $b_{\beta k} = 0$.

Herhangi bir $\beta \in N_0$ için, β 'den çıkış yapan tüm ayrıtlar kümesini F_{β}^{out} ve β 'ye girişi yapan tüm ayrıtlar kümesini F_{β}^{in} olarak tanımlarsak, aşağıdaki karar değişkenleri ile modeli oluşturabiliriz.

Karar Değişkenleri:

x_{ak} $a \in A_0$ ayrıtı üzerindeki $k \in S$ malzemesi akış miktarı

y_i $i \in H$ düğümü hub ise 1, aksi takdirde 0

Model ÇMATHP: Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Hub Ortanca Modeli (ÇMATHP)

$$z^* = \min_{x,y} \sum_{k \in S} \sum_{a \in A_0} c_a x_{ak} \quad (105)$$

$$s.t. \quad \sum_{a \in F_{\beta}^{out}} x_{ak} - \sum_{a \in F_{\beta}^{in}} x_{ak} = b_{\beta k} \quad \beta \in (N_1 \cup N_2 \cup N_3), k \in S \quad (106)$$

$$\sum_{i \in H} y_i = p \quad (107)$$

$$x_{(1i,2i)k} \leq W_k y_i \quad i \in H, k \in S \quad (108)$$

$$x_{(2i,3i)k} \leq W_k y_i \quad i \in H, k \in S \quad (109)$$

$$x_{ak} \geq 0 \quad a \in A_0, k \in S \quad (110)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad i \in H \quad (111)$$

ÇMATHP, ayrıtı-tabanlı akışları esas alan bir modeldir. (105) ve (106) numaralı kısıtlar kaldırıldığında, geriye kalan kısıt seti, standart çok malzemeli akış tabanlı bir modeldir.

$n = |N|$ ve $n^* = |N^*|$ olarak tanımlarsak, gerçek değişken sayısı $(4|E| + 2|E^*| + 2|H|)|S|$ 'dir ve

en fazla n^3 seviyesindedir. İkili değişkenlerin sayısı ise, $|H|$ 'dir ve en fazla n seviyesindedir. Serim, tam olmayan serim ise, akış değişkenlerinin sayısında önemli azaltmalara gidilebilir.

Akış değişkeni sayısı, tam olmayan bir serimde $(20n - 36)n$, tam bir serimde $3n^3 - n^2$ 'dir.

Akış tabanlı kısıtların sayısı, en fazla $3n^2$ seviyesinde olmak üzere, $(2n + n^*)|S|$ 'dir.

İndirgenmiş Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Hub Ortanca Modeli (R- ÇMATHP)

p-ortanca modelinde yapıldığı şekilde, gerçek değişken sayısında önemli azaltımlar sağlanabilir. Bunun için, serimin üç katmanı için, belirli bir yaklaşımla en kısa yolların bulunması gerekir. G_1 katmanında, tüm düğümlerden tüm hub adaylarına en kısa yollara ihtiyaç vardır. Bunun için her bir $1k \in S$ düğümünde $|H|$ birim kaynak olduğu, her bir $1i \in H$ düğümünde 1 birim talep olduğu varsayılarak $|S|$ adet tek-malzemeli minimum-maliyetli akış modeli çözülür. A_k^1 , k için modelin çözümünde pozitif değerlere sahip olan ayrıt kümesi olsun. Bu durumda, $T_k^1 = (N_1, A_k^1)$, $1k$ düğümünde köklü bir en kısa yol arborescence oluşturur. G_2 katmanında, $2i \in H$ ile $2j \in H$ arasındaki en kısa yollara ihtiyaç vardır. k tipi akış, G_2 katmanına herhangi bir hub düğümü $2i$ 'den ulaşabilir. Eğer akış doğrudan $2i$ üzerinden G_3 katmanına gitmezse, G_2 katmanında başka bir hub düğümü $2j$ üzerinden G_3 katmanına geçinceye kadar, G_2 katmanında dolaşır. k akışı, G_2 üzerinde, $2i$ ile $2j$ arasındaki en kısa yolu kullanır. Fakat aynı kısa yol, sadece k akışı tarafından değil, aynı hub çiftini kullanan herhangi bir akış tarafından da kullanılabilir. Bu nedenle, tüm malzeme tipleri için en kısa yolların bulunmasına ihtiyaç vardır. Bunun için, her bir $2i \in H$ düğümü kaynak, $2j \in H, 2j \neq 2i$ düğümü batak kabul edilerek tek-malzemeli minimum maliyet akış modeli, spesifik bir malzeme tipi k' için çözülür ve daha sonra diğer tüm malzeme tipleri $k \neq k'$ için genelleştirilir. Modelde, kaynak düğümünde $|H| - 1$ birim kaynak ve batak düğümlerinde bir birim talep olduğu kabul edilir. $A_{2i,k'}^2$, kaynak düğümünün $2i$ olduğu ve k' tipi malzeme için çözümün bulunduğu modelde, pozitif akışların olduğu ayrıt kümesi olsun.

Bu durumda, $A_{k'}^2 = \bigcup_{2i \in H} A_{2i,k'}^2$ olarak tanımlanırsa, A_k^2 'yi, $k \neq k'$, $A_{k'}^2$ 'ye eşitleyebiliriz.

$T_{2i,k'}^2 = (N_1, A_{2i,k'}^2)$, k' tipi malzeme için $2i$ düğümünde köklü en kısa yol arborescence oluşturur. G_3 katmanında, $3i \in H$ ve $3j \in D$ arasındaki en kısa yollara ihtiyaç vardır. Bu katmandaki kısa yollar, G_2 katmanındakine benzer şekilde, kaynaklar ve taleplerde uygun

değişiklikler yapılarak bulunabilir. Nihai ayrıt setini, A_k^3 olarak tanımlayalım. $\bar{A}_k = A_k^1 \cup A_k^2 \cup A_k^3 \cup A_{12} \cup A_{23}$ olarak tanımlanırsa, x_{ak} değişkenleri sadece $a \in \bar{A}_k$ için tanımlanabilir. Bu durumda, x_{ak} 'nin sayısı $(4|E| + 2|E^*| + 2|H|)|S|$, den $[(n-1) + |H||H-1| + (n-1)|H| + 2|H|]|S|$ 'ye düşürülebilir. Bu değişiklik, değişken sayısının yaklaşık %50 oranında düşmesini sağlamaktadır. İndirgenmiş model, aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

Model R- ÇMATHP: İndirgenmiş Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Hub Ortanca Modeli

$$z^* = \min_{x,y} \sum_{k \in S} \sum_{a \in A_k} c_a x_{ak} \quad (112)$$

$$s.t. \quad \sum_{a \in (F_\beta^{out} \cap \bar{A}_k)} x_{ak} - \sum_{a \in (F_\beta^{in} \cap \bar{A}_k)} x_{ak} = b_{\beta k} \quad \beta \in (N_1 \cup N_2 \cup N_3), k \in S \quad (113)$$

$$\sum_{i \in H} y_i = p \quad (114)$$

$$x_{(1i,2i)k} \leq W_k y_i \quad i \in H, k \in S \quad (115)$$

$$x_{(2i,3i)k} \leq W_k y_i \quad i \in H, k \in S \quad (116)$$

$$x_{ak} \geq 0 \quad a \in \bar{A}_k, k \in S \quad (117)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad i \in H \quad (118)$$

R-ÇMATHP, CPLEX ile çözüldüğünde, belirli büyüklükteki problemler için kabul edilebilir zamanlarda çözüm üretilebilmiştir. Ancak, bazı problemler için elde edilen optimaliteden uzaklık seviyesi (gap) yüksek olmuştur. Bu nedenle, bir sezgisel algoritma ile Benders ayrıştırma algoritması geliştirilmiştir.

R-ÇMATHP İçin Sezgisel Algoritma RFHEUR

RFHEUR, genel olarak iki adımdan oluşmaktadır. Birinci adımda, aday hub kümesi H_C belirlenmekte ve ikinci adımda aday hub kümesi H_C içinden P adet hub seçilmektedir.

ÇMATHP_Rel, Kısıt 'teki $\beta \in N_3$ için tanımlanmış olan akış dengesi kısıtlarını kaldırmak suretiyle elde edilen, ÇMATHP'nin bir gevşetmesi olsun. H_C 'yi belirlemek için, $\bar{H}_k \subseteq H$ olacak şekilde, ÇMATHP'yi k defa çözebiliriz. y_i^k ve $H_k = \{i \in \bar{H}_k : y_i^k = 1\}$, sırasıyla, ÇMATHP-Rel'in k'ninci defa çözümünde elde edilen yer seçimi değişkenleri ve aday düğüm

noktaları olsun. ÇMATHP'yi k 'ninci defa çözümlerken, hub kümesi $\bar{H}_k = H - \bigcup_{\bar{k} < k} H_{\bar{k}}$ olarak alınır. Diğer bir ifadeyle, $(k - 1)$ iterasyonda hub olarak belirlenen düğümler, aday

kümesinden çıkarılır. Böylece, $H_C = \bigcup_k H_k$ ve $|H_C| = p \times k$ olur. Sezgiselin ikinci adımında,

ÇMATHP kısıtlı hub seti $H = H_C$ ile çözülür.

ÇMATHP_Rel, karışık tamsayı bir model olmasına rağmen, saniyeler içinde optimal olarak çözülebilir. H_C ile çözülen ÇMATHP de, birçok problem için kolaylıkla çözülebilir. Ancak, H_C ve N 'nin boyutlarına bağlı olarak, k değeri arttıkça, çözüm zorlaşabilir. $k = 1$ için, ÇMATHP'de tesis yerlerini sabitleyebilir ve LP olarak kısa sürede çözebiliriz. $k \geq 2$ için, H_C kısıtlı ÇMATHP'yi çözmek, serim boyutu büyük olduğunda, yüksek k değerleri için orjinal problemi çözmek kadar zor olabilir. Testlerde, $k = 1, 2$ için iyi sonuçların elde edildiği görülmüştür.

R-ÇMATHP İçin Benders Ayırıştırma Algoritması

R-ÇMATHP modelindeki tamsayı y değişkenleri, h iterasyonunda y^h olarak sabitlenerek aşağıdaki *alt problem* SP (subproblem) elde edilir.

$$z^i = \min z = \sum_{k \in S} \sum_{a \in A_0} c_a x_{ak} \quad (119)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{a \in F_{\beta}^{\text{out}}} x_{ak} - \sum_{a \in F_{\beta}^{\text{in}}} x_{ak} = b_{ik} \quad i \in (N_1 \cup N_2 \cup N_3), k \in S \quad (120)$$

$$\sum_{i \in H} y_i^h = p \quad (121)$$

$$x_{[1i,2i]k} \leq W_k y_i^h \quad i \in H, k \in S \quad (122)$$

$$x_{[2i,3i]k} \leq W_k y_i^h \quad i \in H, k \in S \quad (123)$$

$$x_{ak} \geq 0 \quad a \in A_0, k \in S \quad (124)$$

Sırasıyla (), () ve () numaralı kısıtlar için tanımlanan e_{ik}, f_{ik}, g_{ik} dual değişkenleri ile model () – ()'ün duali alındığında aşağıdaki dual SP elde edilir.

$$z^i = \max z = \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} b_{ik} e_{ik} + \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} W_k y_i^h f_{ik} + \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} W_k y_i^h g_{ik} \quad (125)$$

$$\text{s.t.} \quad e_{ik} - e_{jk} \leq l_{ij} \quad (i, j) \in (A_1 \cup A_2 \cup A_3), k \in S \quad (126)$$

$$e_{ik} - e_{jk} + f_{jk} \leq 0 \quad (i, j) \in (A_{12}), k \in S \quad (127)$$

$$e_{ik} - e_{jk} + g_{ik} \leq 0 \quad (i, j) \in (A_{23}), k \in S \quad (128)$$

$$e_{ik} \text{ urs} \wedge f_{ik}, g_{ik} \leq 0 \quad (129)$$

Her bir iterasyonda, Ana Problem MP'yi iyileştirmek için amaç fonksiyonu ()'ten iki çeşit Benders kesiti elde edilir. Dual SP'nin sınırsız bir çözüme sahip olması, primal SP'nin çözümsüz olduğu anlamına gelmektedir ve bu durumda bir olurluluk kesiti oluşturmak ve eklemek gerekmektedir. Bu amaçla h iterasyonunda, kısıt () eklenir.

$$\sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} b_{ik} e_{ik}^h + \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} W_k f_{ik}^h y_i + \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} W_k g_{ik}^h y_i \leq 0 \quad (130)$$

Eğer dual SP sınırlı, yani primal SP olurlu ise, optimalite kesiti (131), MP'ye eklenir.

$$\eta \geq \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} b_{ik} e_{ik}^h + \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} W_k f_{ik}^h y_i + \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} W_k g_{ik}^h y_i \quad (131)$$

Önerme 1. Problem () – (), p adet herhangi y_i değişkeninin 1 değerini aldığı bütün durumlarda olurlu ve sınırlıdır.

İspat. Modeldeki amaç, hub düğümlerini kullanarak tedarik ve talep düğümleri arasındaki minimum maliyetli akışı tespit etmektir. Akış maliyetleri sonlu olduğu ve negatif olmadığı için () – () kısıtlarını sağlayan bütün y değerleri için problem olurlu ve sınırlıdır.

Sonuç 1. Primal problem olurlu ve sınırlı olduğu için dual SP () – (), her zaman en az bir optimal çözüme sahip olurlu ve sınırlı bir problemidir.

Bu tespitlerin ışığında, dual SP sınırsız olduğunda kullanılan olurluluk kesitlerine ihtiyaç olmadığı görülmektedir. Bu nedenle, MP'yi iyileştirmek için, sadece eniyilik kesitleri kullanılabilir. Bu durumda, MP, aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\text{Min } \eta \quad (132)$$

s.t.

$$\eta \geq \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} b_{ik} e_{ik}^h + \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} W_k f_{ik}^h y_i + \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} W_k g_{ik}^h y_i \quad i \in (N_2), k \in S \quad (133)$$

$$\sum_i y_i = p \quad i \in (N_2), \quad (134)$$

MP'ye, optimalite kısıtlarına ilave olarak, olursuz çözümleri önlemek için kısıt seti () eklenmiştir.

Benders Ayrıştırma algoritması aşağıda verilmiştir:

Algoritma R-ÇMATHP-Benders:

Adım 1: (Başlangıç)

Başlangıç çözümleri için y değişkenlerine değerler atanarak sabitlenir.

Altsınır (LB) = $-\infty$

Üstsınır (UB) = $+\infty$

Adım 2: Eğer LB=UB ise dur. Optimal çözüm elde edilmiştir. LB \neq UB ise Adım 3'e git.

Adım 3: Dual SP'yi çöz. UB = min(UB, z_{SP}^i).

Adım 4: MP'ye yeni bir optimalite kesiti ekle ve MP'yi çöz.

Adım 5: LB = z_{MP}^i olarak güncelle. y değişkenlerinin değerini güncelle ve Adım 2'ye git.

3.6. Ayrıt Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi

Ayrıt kapasiteli p-hub ortanca problemi, ÇMATHP modeli esas alınarak modellenebilir. $\{m,n\}$ yönsüz ayrıtının kapasitesi cap_{mn} olarak tanımlanırsa, ayrıt kapasiteli p-hub ortanca problemi, aşağıdaki şekilde formüle edilebilir.

Model AKÇMATHP: Ayrıt Kapasiteli Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Hub Ortanca Modeli

Amaç Fonksiyonu () ve Kısıtlar () – ()'e ilave olarak;

$$\sum_{i=1,2,3} \sum_{k \in S} (x_{(im, in)k} + x_{(in, im),k}) \leq cap_{mn} \quad \{i, j\} \in E \quad (135)$$

Modeldeki ayrıt kapasitesi, toplama, transfer ve dağıtım için toplam kapasite olarak ele alınmıştır ancak sadece bir bileşen için tanımlanması da mümkündür. Örneğin, sadece transfer bileşeni için kapasite tanımlı ise, () numaralı kısıt seti ikinci katmandaki ayrıtlar için tanımlanır.

AKÇMATHP, gerçek anlamda ayrıt kapasitelerini dikkate alan ilk ayrıt kapasiteli p-hub ortanca modelidir. Literatürde yer alan kısıtlı sayıdaki modelde, GS üzerindeki ayrıt kapasiteleri değil, MS'deki en kısa yol ayrıtları üzerindeki kapasiteler dikkate alınmıştır.

AKÇMATHP İçin Bir Lagrangean Algoritması

Modelin çözümü için, kısıt seti ()'in gevşetilmesine dayanan bir Lagrangean Algoritması geliştirilmiştir. Farklı kısıtların tek başlarına gevşetilmesi mümkün olabileceği gibi, bazı kısıtların aynı anda gevşetilmesi de mümkün olabilir.

$u_{mn} \geq 0$ için Lagrangean Gevşetmesi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$L(u) = \min_{x,y} \sum_{k \in N} \sum_{(i,j) \in A_0} c_a x_{ak} + \sum_{(m,n) \in E} u_{mn} \left[\sum_{i=1,2,3} \sum_{k \in S} x_{(im, in)k} + \sum_{i=1,2,3} \sum_{k \in S} x_{(in, im)k} - cap_{mn} \right] \quad (136)$$

() – () numaralı kısıtlar.

$L(u) \leq z^*$ olduğu bilinmektedir. En iyi altsınırın elde edilmesi için Lagrangean Dual olarak

isimlendirilen $\max_{u \geq 0} L(u)$ 'nin çözülmesi gerekir.

$L(u)$, parçalı doğrusal bir fonksiyondur. Bu nedenle, $\max_{u \geq 0} L(u)$ 'yu çözmek türevlenemeyen bir optimizasyon problemidir. Çalışma kapsamında, problemi çözmek için Altgradyan Optimizasyon tekniği kullanılmıştır.

Algoritma AKÇMATHP-Lagrange:

{Girdi}

Üst sınır L^*

Başlangıç değerleri $u^0 \geq 0$ (Lagrangean Gevşetme kısıtına karşılık gelen dual değişken değerleri)

{Başlangıç}

$$\theta_0^1 := 2$$

$$L_{best} = -\infty$$

{Altgradyan iterasyonları}

for $t := 0, 1, \dots$, tekrarla

$$g_1^t := g_1(x^t, y^t) \quad \{L(u^t)\text{'nin gradyanı}\}$$

$$s_t^1 := \theta_t^1 (L^* - L(u^t)) / \|g_1^t\|^2 \quad \{\text{adım büyüklüğü}\}$$

$$u^{t+1} := \max\{0, u^t + s_t^1 g_1^t\}$$

$$\text{Eger } \|u^{t+1} - u^t\| < \varepsilon \text{ ise}$$

Dur

Eger K iterasyon sonunda gelişme olmazsa

$$\theta_{t+1}^1 := \theta_t^1 / 2$$

Aksi durumda

$$\theta_{t+1}^1 := \theta_t^1$$

$$t := t + 1$$

Dur

3.7. Hub Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi

Düğüm kapasiteli p-hub ortanca problemi, R-ÇMATHP çatısı üzerine kapasite kısıtı eklemek suretiyle modellenebilir. Diğer bir ifadeyle, modelde akış değişkenlerinin sayısı yukarıda açıklandığı şekilde indirgenebilir.

Bir hub düğümün kapasitesini W_j olarak tanımlarsak, modeli aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz. Modele eklenen hub kapasite kısıtında, ikinci katmanda hub düğümüne giriş yapan akışların toplamının hub kapasitesinden küçük olması sağlanmaktadır.

Model HKÇMATHP: Hub Kapasiteli Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Hub Ortanca Modeli

Amaç fonksiyonu () ve Kısıtlar () – ()'e ilave olarak,

$$\sum_k \sum_{i \in N_2} x_{(2i,2j)k} + \sum_k x_{(1j,2j)k} \leq W_j \quad j \in H \quad (137)$$

HKÇMATHP, CPLEX kullanılarak çözüldüğünde, belirli boyuttaki problemler için çözümler üretilebilmektedir. Ancak, problem boyutu büyüyünce çözüm elde etmek zorlaşmakta hatta mümkün olmamaktadır. Bu kapsamda, bir Lagrangean Algoritması geliştirilmiştir.

HKÇMATHP İçin Bir Lagrangean Algoritması

Lagrangean Gevşetmesi farklı kısıtlar üzerinde uygulanabilir. Burada, problemin çözülmesini zorlaştıran () numaralı kısıtlar üzerinde Lagrangean gevşetmesinin uygulanması açıklanacaktır.

$v_j \geq 0$ için Lagrangean Gevşetmesi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$L(v) = \min_{x,y} \sum_{k \in S} \sum_{a \in A_k} c_a x_{ak} + \sum_{j \in H} v_j \left[\sum_{k \in N_2} \sum_{i \in N_2} x_{(2i,2j)k} + \sum_k x_{(1j,2j)k} - W_j \right] \quad (138)$$

() – () numaralı kısıtlar.

$L(v) \leq z^*$ olduğu bilinmektedir. En iyi altsınırın elde edilmesi için Lagrangean Dual olarak

isimlendirilen $\max_{v \geq 0} L(v)$, 'nun çözülmesi gerekir.

$L(v)$, parçalı doğrusal bir fonksiyondur. Bu nedenle, $\max_{v \geq 0} L(v)$, 'yu çözmek türevlenemeyen bir optimizasyon problemidir. Bu problemi çözmek için kullanılan önemli tekniklerden biri, Altgradyan Optimizasyon tekniğidir.

Algoritma HKÇMATHP-Lagrange:

{Girdi}

Üst sınır L^*

Başlangıç değerleri $v^0 \geq 0$ (Lagrangean Gevşetme kısıtına karşılık gelen dual değişken değerleri)

{Başlangıç}

$$\theta_0^2 := 2$$

$$L_{best} := -\infty$$

{Altgradyan iterasyonları}

for $t := 0, 1, \dots$, tekrarla

$$g_2^t := g_2(x^t, y^t) \quad \{L(v^t)\text{'nin gradyanı}\}$$

$$s_t^2 := \theta_t^2 (L^* - L(v^t)) / \|g_2^t\|^2 \quad \{\text{adım büyüklüğü}\}$$

$$v^{t+1} := \max\{0, v^t + s_t^2 g_2^t\}$$

Eger $\|v^{t+1} - v^t\| < \varepsilon$ ise

Dur

Eger K iterasyon sonunda gelişme olmazsa

$$\theta_{t+1}^2 := \theta_t^2 / 2$$

Aksi durumda

$$\theta_{t+1}^2 := \theta_t^2$$

$$t := t + 1$$

Dur

3.8. Karma Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi

Karma kapasiteli p-hub ortanca problemi, ayrıt ve düğüm kapasitelerini ÇMATHP modeline eklemek suretiyle modellenebilir.

Model KKÇMATHP: Karma Kapasiteli Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Hub Ortanca Modeli

Amaç fonksiyonu (1), Kısıtlar (2) – (4), (5) ve (6)

KKÇMATHP, CPLEX kullanılarak çözüldüğünde, ancak çok küçük çaplı problemler için çözüm üretilebilmektedir. Bu sebeple, bir Lagrangean Algoritması geliştirilmiştir.

KKÇMATHP İçin Bir Lagrangean Algoritması

Lagrangean Gevşetmesi farklı kısıtlar üzerinde uygulanabilir. Burada, problemin çözülmesini zorlaştıran (2) ve (3) numaralı kısıtlar üzerinde Lagrangean gevşetmesi uygulanmıştır.

$u_{mn} \geq 0$ ve $v_j \geq 0$ için Lagrangean Gevşetmesi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$L(v) = \min_{x,y} \sum_{k \in S} \sum_{a \in A_k} c_a x_{ak} + \sum_{m,n \in E} u_{mn} \left[\sum_{i=1,2,3} \sum_{k \in S} x_{(im,in)k} + \sum_{i=1,2,3} \sum_{k \in S} x_{(in,im)k} - cap_{mn} \right] + \sum_{j \in H} v_j \left[\sum_k \sum_{i \in N_2} x_{(2i,2j)k} + \sum_k x_{(1j,2j)k} - W_j \right] \quad (139)$$

(2) – (3) numaralı kısıtlar.

$L(u, v) \leq Z^*$ olduğu bilinmektedir. En iyi altsınırın elde edilmesi için Lagrangean Dual olarak

isimlendirilen $\max_{u \geq 0, v \geq 0} L(u, v)$ 'nin çözülmesi gerekir. $L(u, v)$, parçalı doğrusal bir fonksiyondur.

Bu nedenle, $\max_{u \geq 0, v \geq 0} L(u, v)$ 'yu çözmek türevlenemeyen bir optimizasyon problemidir. Bu problemi çözmek için kullanılan önemli tekniklerden biri, Altgradyan Optimizasyon tekniğidir.

Algoritma KKÇMATHP-Lagrange:

{Girdi}

Üst sınır L^*

Başlangıç değerleri $u^0 \geq 0$, $v^0 \geq 0$ (Lagrangean Gevşetme kısıtına karşılık gelen dual değişken değerleri)

{Başlangıç}

$$\theta_0^1 := 2$$

$$\theta_0^2 := 2$$

$$L_{best} = -\infty$$

{Altgradyan iterasyonları}

t := 0, 1, ..., tekrarla
for

$$y_1^t := g_1(x^t, y^t)$$

$$y_2^t := g_2(x^t, y^t)$$

$$s_t^1 := \theta_t^1 (L^* - L(u^t, v^t)) / \|y_1^t\|^2$$

$$s_t^2 := \theta_t^2 (L^* - L(u^t, v^t)) / \|y_2^t\|^2$$

$$u^{t+1} := \max\{0, u^t + s_t^1\}$$

$$v^{t+1} := \max\{0, v^t + s_t^2\}$$

Eğer $\|u^{t+1} - u^t\| < \varepsilon$ ve $\|v^{t+1} - v^t\|$ ise

Dur

Eğer K iterasyon sonunda gelişme olmazsa

$$\theta_{t+1}^1 := \theta_t^1 / 2, \theta_{t+1}^2 := \theta_t^2 / 2,$$

Aksi durumda

$$\theta_{t+1}^1 := \theta_t^1, \theta_{t+1}^2 := \theta_t^2$$

t := t+1

Dur

3.9. Ağaç Yapılı p-Hub Ortanca Problemi

Geleneksel ana dağıtım üssü yerleşim modellerinde, bütün ana dağıtım üslerinin birbiri ile bağlantılı olduğu kabul edilir. Gerçek hayat problemlerinde, her zaman ana dağıtım üslerinin birbirine tamamen bağlı olması mümkün değildir. Ana dağıtım üslerinin birbirine ağaç yapısı ile bağlı olduğu problemler, ağaç yapılı hub yerleşim problemi (Tree-of-Hubs Location Problem) olarak adlandırılır. Ağaç yapılı ana dağıtım üssü problemi için, şu an yapımı halen

devam eden İspanya'daki hızlı tren ağının yapısının oluşturulması örnek olarak verilebilir. Ağaç yapılı hızlı tren ağı oluşturulduğunda, İspanya'da 10000 nüfusun üzerindeki her yerleşim yerinin, herhangi bir hızlı tren istasyonuna en fazla 50 km uzaklıkta olması planlanmaktadır. p adet ana dağıtım üssü yer seçiminin yapılabilecek toplam akış maliyetinin minimize edildiği, ana dağıtım üslerinin birbirine ağaç yapısı ile bağlı olduğu problemler ise Ağaç Yapılı p-Hub Ortanca Problemi olarak adlandırılır. Proje kapsamında, bu problem için 3

farklı model geliştirilmiştir. Modeller, ÇMATHP modelinde G_2 katmanlı için kapsarağaç yapısının oluşturulmasını sağlayacak farklı kısıtların eklenmesiyle elde edilmiştir.

Ağaç yapısının oluşturulması için, birinci modelde **tek-malzemeli akış**, ikinci modelde **Miller-Tucker-Zemlin (MTZ)** (Miller vd., 1960) ve üçüncü modelde **çok-malzemeli akış** kısıtları kullanılmıştır.

Ağaç Yapılı Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Hub Ortanca Modeli 1 (AYÇMATHP1)

AYÇMATHP1'de ağaç yapısının oluşturulmasında, tek-malzemeli akış tabanlı kısıtlar kullanılmıştır. Bunun için, T_a akış değişkenleri tanımlanmıştır. Ağaç yapısının oluşturulması

için, G_2 katmanında, herhangi bir düğüm kaynak düğümü (örneğin α) olarak seçilir. Kaynak

düğümünde $|N_2| - 1$ birim kaynak, kaynak düğümü dışındaki düğümlerde 1 birim talep olduğu varsayılır. Kaynak noktasından talep noktalarına, her bir talep düğümüne sadece bir ayrıt üzerinden akışa müsaade edilirse, ağaç yapısı oluşturulabilir. Akışların sadece ağaç yapısındaki ayrıtlar üzerinde olması zorunlu tutulursa, ağaç yapılı bir ana dağıtım üssü tasarımı elde edilir. Model aşağıda sunulmuştur.

Karar Değişkenleri

x_{ak} $a \in A_0$ ayrıtı üzerindeki $k \in S$ malzemesi akış miktarı

y_i $i \in H$ düğümü hub ise 1, aksi takdirde 0

T_a a ayrıtı üzerindeki akış miktarı

S_a a ayrıtı kapsarağaç içinde ise 1, aksi takdirde 0

Model AYÇMATHP1: Ağaç Yapılı Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Hub Ortanca Modeli 1

$$z^* = \min_{x,y} \sum_{k \in S} \sum_{a \in A_0} c_a x_{ak} \quad (140)$$

$$\sum_{a \in F_\beta^{out}} x_{ak} - \sum_{a \in F_\beta^{in}} x_{ak} = b_{\beta k} \quad \beta \in (N_1 \cup N_2 \cup N_3), k \in S \quad (141)$$

$$\sum_{i \in H} y_i = p \quad (142)$$

$$x_{(1i,2i)k} \leq W_k y_i \quad i \in H, k \in S \quad (143)$$

$$x_{(2i,3i)k} \leq W_k y_i \quad i \in H, k \in S \quad (144)$$

$$\sum_{a \in F_\alpha^{out}} T_a = |N_2| - 1 \quad (145)$$

$$\sum_{a \in F_\beta^{out}} T_a - \sum_{a \in F_\beta^{in}} T_a = -1 \quad \beta \in (N_2 / \alpha) \quad (146)$$

$$\sum_{a \in F_\beta^{in}} S_a = 1 \quad \beta \in (N_2 / \alpha) \quad (147)$$

$$\sum_{a \in F_\alpha^{in}} S_a = 0 \quad (148)$$

$$T_a \leq |N_2| S_a \quad a \in A_2 \quad (149)$$

$$x_{ak} \leq M \times T_a \quad a \in A_2 \quad (150)$$

$$x_{ak}, T_a, S_a \geq 0 \quad a \in A_0, k \in S \quad (151)$$

$$y_i \in [0, 1] \quad i \in H \quad (152)$$

() – () numaralı kısıtlar, ÇMATHP'ye eklenen kısıtlardır. () numaralı kısıt, seçilen başlangıç

düğümünden ikinci katmandaki diğer düğümlere $|N_2 - 1|$ birim akış gönderilmesini sağlar. () numaralı kısıt seti, akış dengesi kısıtlarıdır ve başlangıç düğümü dışındaki düğümlere 1 birim akış gitmesini sağlar. () numaralı kısıt seti, her bir düğüme sadece bir ayrıt üzerinden akış olmasını sağlar. () numaralı kısıt, ağaç yapısı için başlangıç olarak seçilen düğüme giren ayrıt olmamasını sağlar. () ve () numaralı kısıtlar, akış değişkenlerini ilişkilendirir ve akışların sadece ağaç yapısında yer alan ayrıtlar üzerinde olmasını sağlar.

Ağaç Yapılı Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Hub Ortanca Modeli 2 (AYÇMATHP2)

AYÇMATHP2'de ağaç yapısının oluşturulması için MTZ kısıtları kullanılmıştır. Model, aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

İlave Karar Değişkenleri

u_i $i \in A_2$ alt tur eleme değişkeni

S_a a ayrıtı kapsarağaç içinde ise 1, aksi takdirde 0

Model AYÇMATHP2: Ağaç Yapılı Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Hub Ortanca Modeli 2

$$z^* = \min_{x,y} \sum_{k \in S} \sum_{a \in A_0} c_a x_{ak} \quad (153)$$

$$\sum_{a \in F_\beta^{out}} x_{ak} - \sum_{a \in F_\beta^{in}} x_{ak} = b_{\beta k} \quad \beta \in (N_1 \cup N_2 \cup N_3), k \in S \quad (154)$$

$$\sum_{i \in H} y_i = p \quad (155)$$

$$x_{(1i,2i)k} \leq W_k y_i \quad i \in H, k \in S \quad (156)$$

$$x_{(2i,3i)k} \leq W_k y_i \quad i \in H, k \in S \quad (157)$$

$$u_i - u_j + |N_2| S_a \leq |N_2| - 1 \quad i \in N_2, j \in N_2, a \in A_2 \quad (158)$$

$$\sum_{a \in F_\beta^{in}} S_a = 1 \quad \beta \in (N_2 / \alpha) \quad (159)$$

$$\sum_{a \in F_\alpha^{in}} S_a = 0 \quad (160)$$

$$x_{ak} \leq W_k S_a \quad a \in A_2, k \in S \quad (161)$$

$$x_{ak}, u_i, S_a \geq 0 \quad i \in N_2, a \in A_0, k \in S \quad (162)$$

$$y_i, S_a \in [0, 1] \quad a \in A_0, i \in H \quad (163)$$

() – () numaralı kısıtlar, ÇMATHP'ye yeni eklenen kısıtlardır. () numaralı kısıt, MTZ alt tur eleme kısıtlarıdır. Bu kısıt ile alt turlar engellenerek ikinci katmandaki bütün düğümlerin birbirine ağaç yapısı ile bağlanması sağlanır. () numaralı kısıt seti, her bir düğüme sadece bir ayrıt üzerinden akış olmasını sağlar. () numaralı kısıt, ağaç yapısı için başlangıç olarak seçilen düğüme giren ayrıt olmamasını sağlar. () numaralı kısıt akışların sadece ağaç yapısında yer alan ayrıtlar üzerinde olmasını sağlar.

Ağaç Yapılı Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Hub Ortanca Modeli 3 (AYÇMATHP3)

AYÇMATHP3'te, ağaç yapısının oluşturulması için çok-malzemeli akış kısıtları kullanılmıştır. Bunun için, potansiyel hub düğümlerinden biri kaynak düğüm, diğerleri talep düğümü olarak belirlenir. AYÇMATHP1'den farklı olarak, kaynak düğümden talep düğümlerinin her birine, farklı tipte bir birimlik akış gönderilir. AYÇMATHP1'de ağaç yapısını oluşturmak için a ayrıtı üzerindeki akış miktarı için kullanılan T_a değişkeni, AYÇMATHP3'te a ayrıtı üzerindeki m malzemesinin akış miktarını ifade etmek için T_{am} olarak değiştirilir.

Model AYÇMATHP3: Ağaç Yapılı Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Hub Ortanca Modeli 3

$$z^i = \min z = \sum_{k \in S} \sum_{a \in A_0} c_a x_{ak} \quad (164)$$

$$\sum_{a \in F_\beta^{out}} x_{ak} - \sum_{a \in F_\beta^{in}} x_{ak} = b_{\beta k} \quad \beta \in (N_1 \cup N_2 \cup N_3), k \in S \quad (165)$$

$$\sum_{i \in H} y_i = p \quad (166)$$

$$x_{(1i,2i)k} \leq W_k y_i \quad i \in H, k \in S \quad (167)$$

$$x_{(2i,3i)k} \leq W_k y_i \quad i \in H, k \in S \quad (168)$$

$$\sum_{a \in F_\alpha^{out}} T_{am} = 1 \quad m \in (N_2 / \alpha), a \in A_2 \quad (169)$$

$$\sum_{a \in F_\beta^{out}} T_{am} - \sum_{a \in F_\beta^{in}} T_{am} = -1 \quad \beta \in (N_2 / \alpha), m \in \left(\frac{N_2}{\alpha} \right), i = m \quad (170)$$

$$\sum_{a \in F_\beta^{out}} T_{am} - \sum_{a \in F_\beta^{in}} T_{am} = 0 \quad \beta \in (N_2 / \alpha), m \in \left(\frac{N_2}{\alpha} \right), i \neq m \quad (171)$$

$$\sum_{a \in F_{\beta}^+} S_a = 1 \quad \beta \in (N_2/\alpha) \quad (172)$$

$$\sum_{a \in F_a^+} S_a = 0 \quad (173)$$

$$T_{am} \leq S_a \quad a \in A_2, m \in (N_2/\alpha) \quad (174)$$

$$x_{ak} \leq W_k \cdot S_a \quad a \in A_2, k \in S \quad (175)$$

$$x_{ak}, T_a \geq 0 \quad a \in A_0, k \in S \quad (176)$$

$$y_i, S_a \in [0,1] \quad a \in A_0, i \in H \quad (177)$$

() – () numaralı kısıtlar, ÇMATHP'ye eklenen kısıtlardır. () numaralı kısıt, ikinci katmanda seçilen başlangıç düğümünden bir birimlik akış gönderilmesini sağlar. () ve () numaralı kısıtlar ile T_{ijm} akışlarının her bir m düğümüne gitmesi hedeflenir. Ağaç yapısının oluşabilmesi için her düğüme giren bir ayrıtın olması gerekliliği () numaralı kısıt ile sağlanır. () numaralı kısıt ise ağaç yapısı için başlangıç olarak seçilen düğüme giren ayrıt olmamasını sağlar. T_{ijm} akışının ağaç yapısında tanımlı ayrıtlarda ilerleyebilmesi için ise () numaralı kısıt tanımlanmıştır. Özetle () – () numaralı kısıtlar ile ağaç yapısı tasarlanır. () numaralı kısıtın amacı, akış değişkeni X_{ak} 'nin oluşturulan ağaç yapısında akışını sağlamaktır.

AYÇMATHP1 İçin Geliştirilen Sezgisel Algoritma

CPLEX ile yapılan hesaplama testleri, optimizasyon programları ile ancak küçük boyutlu problemlerin çözülebildiğini göstermiştir. Bu nedenle, modelin yapısını esas alan gevşet-sabit (relax-fix) tarzında sezgisel bir algoritma geliştirilmiştir. Sezgisel 3 aşamadan oluşmaktadır: Birinci aşamada uygun görülen kısıtlar gevşetilerek hub noktaları seçilir. İkinci aşamada, geliştirilen matematiksel model ile seçilen hub noktaları arasında, bağlantı maliyetini en küçükleyecek şekilde ağaç yapısı oluşturulur. Son aşamada, belirlenen hub düğümleri ile bu hub düğümleri arasındaki bağlantılar sabitlenerek orijinal model çözülür.

Algoritma AYÇMATHP1-Sezgisel

1. Aşama

Ağaç yapısını oluşturan kısıtlar () – () ile ikinci katmandan üçüncü katmana yalnızca hub noktasından akışı sağlayan kısıtın () AYÇMATHP1'den çıkarılması ile elde edilen gevşetilmiş model çözülür.

2. Aşama

Birinci aşamada belirlenen hub noktaları arasındaki minimum maliyetli ağaç yapısı belirlenir. Bunun için, seçilen hub düğümlerinden biri kaynak düğüm (örneğin α) olarak seçilir. Kaynak düğümünde p-1 birim kaynak, kaynak düğüm dışındaki hub düğümlerinde 1 birim talep olduğu varsayılarak, aşağıdaki akış modeli çözülür.

$$z^i = \min_{T,S} z = \sum_{k \in S} \sum_a c_a T_a \quad (178)$$

$$\sum_{a \in F_\alpha^{out}} T_a = p - 1 \quad (179)$$

$$\sum_{a \in F_\beta^{out}} T_a - \sum_{a \in F_\beta^{in}} T_a = -1 \quad \beta \in (H - \alpha) \quad (180)$$

$$\sum_{a \in F_\beta^{out}} T_a - \sum_{a \in F_\beta^{in}} T_a = 0 \quad \beta \in (N_2 - H) \quad (181)$$

$$\sum_{a \in F_\beta^{in}} S_a \leq 1 \quad \beta \in N_2 \quad (182)$$

$$\sum_{a \in F_\alpha^{in}} S_a = 0 \quad (183)$$

$$T_a \leq (p - 1) S_a \quad a \in A_2 \quad (184)$$

$$T_a \geq 0 \quad a \in A_2 \quad (185)$$

$$s_a \in [0, 1] \quad a \in A_2 \quad (186)$$

3. Aşama

İkinci aşamada elde edilen ağaç yapısı, AYÇTMAHP1'de sabitlenerek model çözülür.

AYÇMATHP1 için Benders Ayırıştırma Algoritması

Benders Ayırıştırma algoritması için AYÇMATHP1 modelindeki tamsayı y değişkenleri ve S değişkenleri h iterasyonunda y^h ve S^h olarak sabitlenerek aşağıdaki alt problem SP elde edilir.

$$z^i = \min z = \sum_{k \in S} \sum_{a \in A_0} c_a x_{ak} \quad (187)$$

$$\sum_{a \in F_\beta^{out}} x_{ak} - \sum_{a \in F_\beta^{in}} x_{ak} = b_{ik} \quad i \in (N_1 \cup N_2 \cup N_3), k \in S \quad (188)$$

$$\sum_{i \in H} y_i^h = p \quad (189)$$

$$x_{1i,2i,k} \leq W_k y_i^h \quad i \in H, k \in S \quad (190)$$

$$x_{2i,3i,k} \leq W_k y_i^h \quad i \in H, k \in S \quad (191)$$

$$\sum_{a \in F_\alpha^{out}} T_a = |N_2| - 1 \quad (192)$$

$$\sum_{a \in F_\beta^{out}} T_a - \sum_{a \in F_\beta^{in}} T_a = -1 \quad \beta \in (N_2 - \alpha) \quad (193)$$

$$\sum_{a \in F_\beta^{in}} S_a = 1 \quad \beta \in (N_2 - \alpha) \quad (194)$$

$$\sum_{a \in F_\alpha^{in}} S_a = 0 \quad (195)$$

$$T_a \leq |N_2| S_a \quad a \in A_2 \quad (196)$$

$$X_{ak} \leq W_k S_a \quad a \in A_2 \quad (197)$$

$$X_{ak}, T_a \geq 0 \quad a \in A_0, k \in S \quad (198)$$

$$Y_i, S_a \in [0, 1] \quad i \in H \quad (199)$$

$(\cdot), (\cdot) - (\cdot)$ ve $(\cdot) - (\cdot)$ numaralı kısıtlar için, sırasıyla, $e_{ik}, f_{ik}, g_{ik}, tt1, tt2_i, tt3_{ij}, tt4_{ijk}$ dual değişkenler tanımlanırsa, aşağıdaki dual SP problemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\max Z = Z^i &= \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} b_{ik} e_{ik} + \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} W_k y_i^h f_{ik} + i \\
&\sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} W_k y_i^h g_{ik} + (|N_2| - 1) * tt_1 - \sum_{i \in (N_2 \setminus \alpha)} tt_2; \\
&\quad + \sum_{i \in N_2} \sum_{j \in N_2} u * (s_{ij}^h + s_{ji}^h) * tt_3_{ij} \\
&\quad + \sum_{i \in N_2} \sum_{j \in N_2} \sum_{k \in S} W_k * (s_{ij}^h + s_{ji}^h) * tt_4_{ijk}
\end{aligned} \tag{200}$$

$$e_{ik} - e_{jk} \leq l_{ij} \quad (i, j) \in (A_1 \cup A_3), k \in S \tag{201}$$

$$e_{ik} - e_{jk} + tt_4_{ijk} \leq l_{ij} \quad (i, j) \in A_{12}, k \in S \tag{202}$$

$$e_{ik} - e_{jk} + f_{jk} \leq 0 \quad (i, j) \in A_{12}, k \in S \tag{203}$$

$$e_{ik} - e_{jk} + g_{ik} \leq 0 \quad (i, j) \in A_{23}, k \in S \tag{204}$$

$$tt_1 - tt_2_j + tt_3_{ij} \leq 0 \quad i = \alpha, (i, j) \in A_2 \tag{205}$$

$$tt_2_i - tt_2_j + tt_3_{ij} \leq 0 \quad i, j \in (N_2 \setminus \alpha), (i, j) \in A_2 \tag{206}$$

$$tt_2_i + tt_3_{ij} \leq 0 \quad j = \alpha, i \in (N_2 \setminus \alpha), (i, j) \in A_2 \tag{207}$$

$$e_{ik}, tt_1, tt_2_i, \text{ ve } f_{ik}, g_{ik}, tt_3_{ij}, tt_4_{ijk} \leq 0 \quad i, j, k \tag{208}$$

Her bir iterasyonda, Ana Problem MP'yi iyileştirmek için amaç fonksiyonu () kullanılarak olurluluk ve optimalite olmak üzere iki tip Benders kesiti elde edilir. Ancak ÇMATHP'de olduğu gibi, AYÇMATHP1'de de olurluluk kesitine ihtiyaç bulunmamaktadır.

Önerme 2. Problem () - (), p adet herhangi y_i değişkeninin 1 değerini aldığı ve hub noktaları arasında ağaç yapısını oluşturan s_{ij} değerleri için her zaman olurlu ve sınırlıdır.

İspat. Modeldeki amaç, hub düğümlerini kullanarak tedarik ve talep düğümleri arasındaki minimum maliyetli akışı tespit etmektir. Akış maliyetleri sonlu olduğu ve negatif olmadığı için () - () numaralı kısıtları sağlayan bütün y ve s değerleri için problem olurlu ve sınırlıdır.

Sonuç 2. Primal problem, olurlu ve sınırlı için dual SP () - () de her zaman en az bir optimal çözüme sahip olurlu ve sınırlı bir problemdir.

Bu duruma göre, MP aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\text{Min } \eta \tag{209}$$

$$\eta \geq \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} b_{ik} e_{ik}^h + \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} W_k f_{ik}^h y_i + \sum_{k \in S} \sum_{i \in N_0} W_k g_{ik}^h y_i + (u-1) * tt_1^h. \tag{210}$$

$$+ \sum_{i \in N_2} \sum_{j \in N_2} u * (s_{ij} + s_{ji}) * tt 3_{ij}^h$$

$$+ \sum_{i \in N_2} \sum_{j \in N_2} \sum_{k \in S} W_k * (s_{ij} + s_{ji}) * tt 4_{ijk}^h$$

$$\sum_i y_i = p \quad (211)$$

$$u_i - u_j + |N_2| S_a \leq \vee N_2 - 1 \vee \delta \quad i \in N_2, j \in N_2, a \in A_2 \quad (212)$$

$$\sum_{a \in F_\beta^i} S_a = 1 \quad \beta \in (N_2 \setminus \alpha) \quad (213)$$

$$\sum_{a \in F_\alpha^i} S_a = 0 \quad (214)$$

MP'ye, optimalite kesitlerine ilave olarak, problemde, olursuz çözümleri engellemek için () - () numaralı kısıtlar eklenmiştir. () numaralı kısıt seti, hub düğümü sayısının p olmasını; () - () numaralı kısıt setleri ise hub düğümlerinin ağaç yapısına uygun olarak bağlanmasını sağlar.

Benders Algoritmasının adımları aşağıda verilmiştir.

Algoritma Benders-DKÇMATP2:

Adım 1: (Başlangıç)

Başlangıç çözümü için y değişkenlerine değerler atanarak sabitlenir.

Altsınır (LB) = $-\infty$

Üstsınır (UB) = $+\infty$

Adım 2: Eğer LB=UB ise dur. Optimal çözüm elde edilmiştir. LB \neq UB ise Adım 3'e git.

Adım 3: Dual SP'yi çöz. UB = $\min(UB, z_{SP}^i)$.

Adım 4: MP'ye yeni bir optimalite kesiti ekle ve MP'yi çöz.

Adım 5: LB = z_{MP}^i olarak güncelle. y değişkenlerinin değerini güncelle ve Adım 2'ye git.

3.10. p-Hub Ortanca Kesme/Önleme Problemi

Engelleme/Kesme (Interdiction); serim üzerinde kurgulanan sistemin bileşenlerine, sistemin çalışmasını olumsuz yönde etkilemek amacıyla, dışarıdan veya içeriden bir rakip tarafından saldırı düzenlenmesi durumudur. p-hub ortanca problemi kapsamında, ana dağıtım üslerine bir saldırı düzenlenebileceği kabul edilerek problem ele alınmıştır.

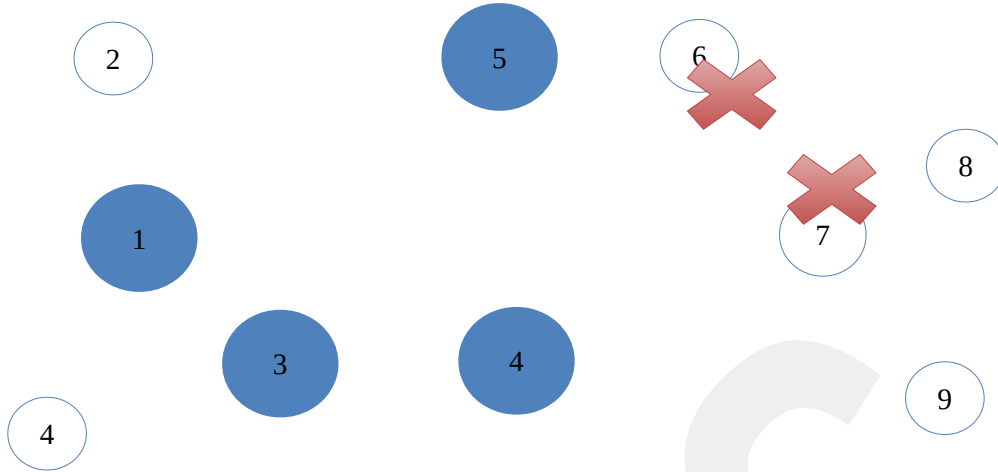
Kesme/Önleme modellerinde, serim kullanıcısı ve saldırganın birbirlerine karşı pozisyonlarını modellemek için oyun teorisinde 'Stackelberg oyunu' olarak adlandırılan ilkeler kullanılır. Stackelberg oyunu; iki oyuncunun birbirlerine karşı ardışık şekilde karar almalarını modeller ve oyuncularından biri 'lider' diğeri ise 'takipçi' olarak adlandırılır. Projede geliştirilen 'p-hub



Şekil 6. Lei'nin (2013) çözüm yaklaşımı

Lei'nin (2013) modelleme yaklaşımında, serim kullanıcısı 4 hub yerleştirmek isterken, model bu seçime izin vermemekte ve serimin, engelleme sonrasında geriye kalan hub düğümleri ile devam etmesi istenmektedir. Ancak bu yaklaşım, oyun teorisi mantığı içinde, asıl hedeften uzaklaşılmasına sebep olmaktadır. Serim kullanıcısının hedefi, engelleme olmasına rağmen 4 hub için yer seçimi yapmaktır. Bu oyunda, engelleyici, serimdeki üs sayısını düşürmekten ziyade akış maliyetlerini nasıl maksimize etmesi gerektiği üzerine yoğunlaşmaktadır. Bundan dolayı, herhangi bir üs engellendiği zaman; serim kullanıcısının bu hamleye karşılık olarak yeni seçeceği üssün hangisinin olacağına cevabını serim engelleyicisinin bilmesi ve eğer gerekiyorsa (akış maliyeti maksimize olacak ise), ilk başta ana dağıtım üsleri arasında yer almasa dahi, alternatif düğüme de saldırması, yani stratejik bir hamle yapması gerekmektedir.

Proje kapsamında, yukarıdaki modelleme yaklaşımından farklı bir yaklaşım kullanılmıştır. Önerilen yaklaşımda, serim önleyicisi, ana dağıtım üslerinden 7'nci düğüme ve serim kullanıcısının akışını minimize etmek için yöneleceği 6'nci düğüme müdahale eder. Bunun sebebi, 6'nci düğüm başlangıçta ana dağıtım üssü olmasa da, engelleme sonrasında serim kullanıcısı tarafından ana dağıtım üssü olarak seçilmesi durumunda, serim kullanıcısının daha düşük maliyet elde edebilmesidir. Bunun için önleyici, bu stratejik hamleyi görür ve o düğüme de müdahale eder. Önerilen yaklaşıma bir örnek, Şekil 7'de verilmiştir.



Şekil 7. Proje kapsamında önerilen modelleme yaklaşımı ile örnek bir çözüm

Problemi modellemek için, ÇMATHP'deki tanımlara ilave olarak, aşağıdaki parametre ve değişkenler tanımlanmıştır.

Parametreler

- C serim engelleyisinin toplam bütçesi
- c_i ana dağıtım üssü i 'yi engellemek için gereken bütçe miktarı
- M_i düğüm i 'ye eklenen ceza maliyeti (uzunluk biriminde)

Karar Değişkenleri

- t_i Serim kullanıcısının karar değişkenidir. Eğer i düğümü engellenmişse değeri 1, değil ise 0'dır.

Model ÇMATHKM: Çok-Malzemeli Akış Tabanlı p-Hub Ortanca Kesme/Önleme Modeli

$$\max_{t \in T_I} \min Z^c = \sum_{k \in S} \sum_{a \in A_0} l_a X_{ak} + \sum_{i \in H} (t_i M_i) y_i \quad (215)$$

$$\text{where } T_I = \left\{ t : \sum_{i \in H} c_i t_i \leq C, t_i \in \{0,1\}, \forall i \in H \right\}$$

$$\text{s.t. } \sum_{a \in F_\beta^{\text{out}}} X_{ak} - \sum_{a \in F_\beta^{\text{in}}} X_{ak} = b_{\beta k} \quad \beta \in (N_1 \cup N_2 \cup N_3), \quad (216)$$

$$k \in S$$

$$\sum_{i \in H} y_i = p \quad (217)$$

$$X_{\{1i,2i\}k} \leq W_k y_i \quad i \in H, k \in S \quad (218)$$

$$X_{\{2i,3i\}k} \leq W_k y_i \quad i \in H, k \in S \quad (219)$$

$$X_{ak} \geq 0 \quad a \in A_0, k \in S \quad (220)$$

$$y_i \in \{0,1\} \quad i \in H \quad (221)$$

Amaç fonksiyonu (215), akış maliyetini en küçükler. Ana dağıtım üssü i engellendiğinde, amaç fonksiyonun ikinci terimi, engellenen bu üssün seçilmesi halinde, amaç fonksiyonuna M_i kadar bir ceza maliyeti uygular. Bu ek maliyet, serim kullanıcısının engellenmiş düğümleri

ana dağıtım üssü olarak seçmesine engel olur. Alt modeldeki () – () kısıtlarına sahip minimizasyon modeli, ÇMATHP ile aynıdır. T_I , engelleme kaynaklarını kısıtlayan bütçe miktarıdır.

Ayrıştırma Tabanlı Çözüm Metodolojisi

ÇMATHKM iki seviyeli bir modeldir. Bundan dolayı, genel çözüm yöntemlerinin uygulanması mümkün değildir. Bu tarz çok seviyeli modellere yaygın bir çözüm yaklaşımı, ayrıştırma algoritmalarıdır. Proje kapsamında da, ÇMATHKM çözümü için detayları aşağıda verilen Benders ayrıştırma algoritmasına benzeyen bir ayrıştırma algoritması geliştirilmiştir.

Ayrıştırılmış ÇMATHKM

Üst Problem (\hat{Y} için)

$$z_{\hat{Y}} = \max_{t \in T} z \quad (222)$$

$$\text{s.t.} \quad z \leq l_a X_{ak} + \hat{c} \sum_{i \in H} (t_i M_i) \hat{y}_i \quad (223)$$

$$\text{where } T_I = \left\{ t : \sum_{i \in H} c_i t_i \leq C, t_i \in [0,1], \forall i \in H \right\}$$

Alt problem (\hat{t} için)

$$\min z_{\hat{T}} = \sum_{k \in S} \sum_{a \in A_0} l_a X_{ak} + \sum_{i \in H} (\hat{t}_i M_i) y_i \quad (224)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{a \in F_{\beta}^{\text{out}}} X_{ak} - \sum_{a \in F_{\beta}^{\text{in}}} X_{ak} = b_{\beta k} \quad \beta \in (N_1 \cup N_2 \cup N_3), k \in S \quad (225)$$

$$\sum_{i \in H} y_i = p \quad (226)$$

$$X_{(1i,2i)k} \leq W_k y_i \quad i \in H, k \in S \quad (227)$$

$$X_{(2i,3i)k} \leq W_k y_i \quad i \in H, k \in S \quad (228)$$

$$X_{ak} \geq 0 \quad a \in A_0, k \in S \quad (229)$$

$$y_i \in [0,1] \quad i \in H \quad (230)$$

Üst Problem için:

Amaç fonksiyonu (), () ile kısıtlanmış bir en büyükleme fonksiyonudur. () kısıtı esas itibarıyla, çözüm sırasındaki iterasyonlarda üst probleme eklenen optimalite kesileridir. Bu kesiler, hangi düşümlerin engelleneceğine karar verirler. Üst problemde, \hat{Y}_i değerleri yani serim kullanıcısının seçtiği ana dağıtım üssleri alt problemde kararlaştırıldığı için sabittir. T_I , engelleme kaynaklarını kısıtlayan bütçe miktarıdır.

Alt Problem için:

Alt problem () – (), tam olarak serim kullanıcısının ÇMATHP en küçükleme modelidir.

Ayrıştırılmış ÇMATHKM'nin çözümü için geliştirilen algoritma aşağıda verilmiştir.

Algoritma ÇMATHKM-Ayrıştırma

Girdi: Bir ÇMATHKM programı ve yeterli optimal açıklık ε .

Çıktı: Engelleme planı t^c (en fazla ε optimal açıklıkta)

Adım 0: $\hat{X} \leftarrow \emptyset, \underline{z} \leftarrow -\infty, \hat{z} \leftarrow \infty, \hat{t} \leftarrow 0$.

Adım 1: Alt problem, \hat{y} değişkeni için $z_{\hat{t}}$ amaç fonksiyonu ile çöz.

$$\hat{Y} \leftarrow \hat{Y} \cup \hat{y}.$$

$$\text{Eğer, } \underline{z} < z_{\hat{t}}, t' \leftarrow \hat{t} \text{ ve } \underline{z} \leftarrow z_{\hat{t}}$$

Adım 2: Üst problemi \hat{t} değişkeni için $z_{\hat{y}}$ amaç fonksiyonu ile çöz.

$$\bar{z} \leftarrow z_{\hat{y}}$$

Adım 3: Eğer $\hat{z} - \underline{z} > \varepsilon$ ise Adım 1'e git.

Adım 4: $t^c \leftarrow t', t^c$ 'yi göster ve dur.

Algoritmanın hassasiyeti aşağıdaki gözlemlere dayanır.

- Alt problem \hat{t} karar değişkenine karşı olarak optimal bir sonuç bulur. Bundan dolayı $z_{\hat{t}}$ değeri engelleyicinin amaç fonksiyonu için alt bir sınır verir.
- Eğer alt problem, sınırları iyileştiremez ise, alt ve üst sınır istenen optimal açıklığa yakınsayarak algoritma son bulur.
- Optimal sonuç sınırlı sayıda iterasyon ile ortaya çıkar.
- $\hat{Y} \subseteq Y$ olduğu zaman üst problem ÇMATHKM'nin gevşetilmiş halidir, bundan dolayı da, $z_{\hat{y}}$ program için bir üst sınır değeri vermektedir.

Altproblem, algoritmanın her iterasyonunda optimal hub düğümlerini bulur ve üst probleme verir. Üst problemde engellenen hub düğümlerine, ceza maliyetleri eklenir. Ardından, alt problem, engellenen hub düğümlerini dikkate alarak yeni hub düğümleri belirler. Bu iterasyonlar, üst problemin üst ve alt sınırları eşleşene kadar devam eder. Bu son nokta, oyunun sonu olan serim kullanıcısı ve engelleyicisinin çözümüdür. Oyunun sonunda serim kullanıcısı, hub düğümleri için alternatif bir yer planı oluşturur. Eğer serim kullanıcısı bu alternatif planı uygularsa, engelleyici müdahalede bulunmaz çünkü serim kullanıcısı, engelleme riskini göz önüne almadığı daha iyi bir akış maliyetine sahip hub yerleşim planına dönebilir. Bununla birlikte, eğer serim kullanıcısı, alternatif plan yerine optimal planı uygularsa, serim muhtemel saldırılara açık olacaktır çünkü engelleyici, akış maliyetini artırma fırsatını yakalamış olur.

4. BULGULAR

Bu bölümde, geliştirilen modeller ve çözüm algoritmaları ile gerçekleştirilen hesaplama testlerinin sonuçları sunulacaktır. Sonuçlar, 2.50 GHz Intel Core i7-4710HQ işlemci ve 16 GB geçici belleğe sahip bir bilgisayarda, CPLEX 12.1 kullanılarak elde edilmiştir. Modeller ve algoritmalar, GAMS ve Java kullanılarak kodlanmıştır. Testlerde, aksi belirtilmedikçe, CPLEX'in standart ayarları kullanılmıştır.

p-Ortanca problemlerine ilişkin testler, literatürdeki Yöneylem Araştırması Kütüphanesinde bulunan 40 ORL problemi üzerinde gerçekleştirilmiştir (Beasley, 1990). ORL problemlerindeki düğüm sayısı, 100-900 arasında değişmektedir. Testlerde, ORL1 ve ORL2 olmak üzere iki tip problem ele alınmıştır. ORL1 problemleri, tam olmayan serimler üzerinde tanımlı olan orjinal ORL problemleridir ve ayrıt uzunlukları sadece tanımlı ayrıtlar için verilmiştir. ORL2 problemleri, ORL1 problemlerinin tam serimler üzerinde tanımlı versiyonlarıdır ve ayrıt uzunlukları, ORL1 problemlerine Floyd Algoritmasını (Floyd, 1962) uygulamak suretiyle elde edilen en kısa yol uzunluklarıdır. ORL1 problemleri, proje kapsamında önerilen modellerin ve algoritmaların test edilmesinde, ORL2 problemleri ise literatürde yer alan klasik model CF'nin test edilmesinde kullanılmıştır. Sonuçların karşılaştırılması için literatürdeki modeller arasından CF'nin seçilmesinin sebebi, CF'nin klasik olarak kabul edilmesi ve CF'yi esas alan çok sayıda çalışmanın bulunmasıdır.

p-Hub ortanca problemlerine ilişkin testler, 81 düğümlük TR81 ve TR81(C) problemleri ile gerçekleştirilmiştir. TR81 problemleri, Türkiye'deki karayolları ulaştırma ağı esas alınarak oluşturulan tam olmayan serim yapısı üzerinde tanımlanmıştır. Serim uzunlukları, komşu iller arasındaki direkt mesafeler kullanılarak tanımlanmıştır. TR81(C) problemleri, TR81 problemlerine Floyd Algoritması uygulanmak suretiyle elde edilen, tam serim yapısı üzerinde

tanımlı problemlerdir. Farklı problemlerin oluşturulması için, $|H| = |N|$ durumu hariç $E^* = E$ ve $N^* = N$ kabul edilerek, H and P değerleri değiştirilmiştir. $\chi_{ij} = \delta_{ij} = 1$ ve $\alpha_{ij} = 0.7$ olarak

alınmıştır. w_{ij} değerleri, [10,30] üniform dağılımdan tamsayı değerler çekmek suretiyle elde edilmiştir. Testlerde kullanılan problemlerin özellikleri, **Tablo 1**'de sunulmuştur. TR81 problemleri, proje kapsamında geliştirilen modellerin ve algoritmaların test edilmesinde, TR81(C) problemleri ise sonuçların karşılaştırılması için seçilen literatürdeki MCL (Marin vd., 2006) ile EK (Ernst and Krishnamoorthy, 1998) modellerinin test edilmesinde kullanılmıştır. EK modelinin seçilmesinin temel nedeni, bu modelin optimizasyon paket programları ile çözümde en iyi sonuçları verdiğinin kabul edilmesidir. MCL'nin seçilmesinin temel nedeni de, üçgen eşitsizliğini sağlamayan durumlar için de kullanılabilmesi itibarıyla, proje kapsamında

4.1 Kapasitesiz p-Ortanca Problemi

Kapasitesiz p-ortanca problemi için geliştirilen TMATP, ÇMATP ve R-ÇMATP modellerinin performansını, literatürde yer alan CF modelinin performansı ile karşılaştırmak amacıyla, CPLEX kullanılarak testler gerçekleştirilmiştir. Testlerde, CPLEX'in en fazla 3600 saniye çalışmasına müsaade edilmiştir. **Tablo 2** ve **Tablo 3**'te, sırasıyla, ORL2 ve ORL1 problemleri kullanılarak elde edilen sonuçlar verilmiştir. **Tablo 2**'deki sonuçlara göre, üçgen eşitsizliğinin sağlandığı tam serimler için, CF'nin performansı ÇMATP'nin performansından daha iyidir. CF ile tüm problemler için optimal çözümler bulunabilirken, ÇMATP ile üç problem için optimal çözüm elde edilememiştir. Hatta, iki problem için bellek yetersiz kaldığı için çözüm bulunamamıştır. Bu aslında beklenen bir sonuçtur çünkü tam serim yapısı üzerine kurulu çok malzemeli akışların kullanıldığı modellerin boyutları çok çabuk büyüebilmektedir. ÇMATP modelinin tam olmayan serim yapısı üzerinde çalışabilecek şekilde tasarlanmasının bir nedeni de budur. Diğer yandan, **Tablo 3**'ün sonuçlarına göre, proje kapsamında p-ortanca problemi için geliştirilen nihai model R-ÇMATP ile tüm problemler için optimal çözümler bulunmuştur. Ayrıca, toplam çözüm zamanları incelendiğinde, R-ÇMATP'nin performansının CF'ye göre daha iyi olduğu görülmektedir. TMATP'nin performansı, z_{LP}^i sıfır olduğu için, diğer modellere göre oldukça kötüdür. Sonuç olarak, kapasitesiz p-ortanca problemi için R-ÇMATP'nin kullanılmasının hesaplama ölçütleri bakımından daha avantajlı olduğu değerlendirilmiştir.

CPLEX ile yapılan testler, ÇMATP ve R-ÇMATP modellerinin performansının genel olarak iyi olduğunu göstermiştir. Ancak, özellikle ÇMATP'de bellek sorunu yaşanması ve daha büyük boyutlu problemlerin çözüm ihtiyacı olabileceği değerlendirilerek, Benders Ayrıştırma Algoritması geliştirilmiştir. **Tablo 4**'te, aynı test problemleri için Benders-ÇMATP Algoritmasının test sonuçları sunulmuştur. Sonuçlar incelendiğinde, çözüm zamanlarının ortalama olarak daha yüksek olduğu görülmekle beraber, önerilen algoritmanın daha büyük çaplı problemlerin çözümünde kullanılabilirliği görülmüştür.

Tablo 2. ORL2 problemleri için hesaplama sonuçları (OUM: Bellek yetersiz)

Pr.No.	N	p	z_{LP}^*	CF			ÇMATP				
				BP	Gap (%)	T_{LP}	T_{top}	BP	Gap (%)	T_{LP}	T_{top}
1		5	5819.0	5819	0.0	0.19	0.33	5819	0.0	0.16	0.25
2		10	4088.5	4093	0.0	0.13	0.59	4093	0.0	0.11	0.65
3	100	10	4240.5	4250	0.0	0.20	2.22	4250	0.0	0.11	0.56
4		20	3034.0	3034	0.0	0.08	0.23	3034	0.0	0.05	0.16
5		33	1355.0	1355	0.0	0.06	0.23	1355	0.0	0.05	0.16
6		5	7783.5	7824	0.0	3.01	38.00	7824	0.0	1.65	8.39
7		10	5631.0	5631	0.0	1.67	2.93	5631	0.0	0.76	1.26
8	200	20	4445.0	4445	0.0	0.81	2.04	4445	0.0	0.50	1.00
9		40	2734.0	2734	0.0	0.66	1.98	2734	0.0	0.47	0.98
10		67	1255.0	1255	0.0	0.53	1.78	1255	0.0	0.45	0.97
11		5	7693.3	7696	0.0	11.86	23.24	7696	0.0	7.19	15.18
12		10	6625.8	6634	0.0	6.83	73.71	6634	0.0	3.45	9.73
13	300	30	4374.0	4374	0.0	2.54	6.68	4374	0.0	1.72	3.09
14		60	2967.2	2968	0.0	2.7	10.36	2968	0.0	2.20	7.42
15		100	1729.0	1729	0.0	1.95	6.04	1729	0.0	1.84	3.20
16		5	8092.0	8162	0.0	25.60	1049.20	8162	0.0	12.64	61.15
17		10	6968.7	6999	0.0	23.49	500.14	6999	0.0	9.58	52.62
18	400	40	4808.5	4809	0.0	8.10	21.37	4809	0.0	5.73	12.70
19		80	2845.0	2845	0.0	6.61	14.91	2845	0.0	4.34	6.68
20		133	1789.0	1789	0.0	4.87	12.81	1789	0.0	3.77	6.18
21		5	9138.0	9138	0.0	20.92	34.66	9138	0.0	12.85	16.75
22		10	8544.0	8579	0.0	88.16	415.71	8579	0.0	42.21	171.91
23	500	50	4619.0	4619	0.0	14.99	29.25	4619	0.0	8.13	12.12
24		100	2961.0	2961	0.0	14.45	28.33	2961	0.0	10.09	13.98
25		167	1828.0	1828	0.0	10.98	24.82	1828	0.0	7.80	11.72
26		5	9853.8	9917	0.0	83.78	627.69	9917	0.0	104.04	418.46
27		10	8301.8	8307	0.0	103.86	480.42	8307	0.0	63.43	197.68
28	600	60	4498.0	4498	0.0	19.21	333.10	4498	0.0	19.42	25.76
29		120	3033.0	3033	0.0	14.58	122.89	3033	0.0	15.69	21.68
30		200	1989.0	1989	0.0	13.81	119.08	1989	0.0	11.75	17.77
31		5	10026.0	10086	0.0	145.67	780.18	10086	0.0	125.67	451.73
32	700	10	9292.6	9297	0.0	163.95	720.37	9297	0.0	154.41	353.73
33		70	4700.0	4700	0.0	31.67	194.76	4700	0.0	31.26	39.94
34		140	3013.0	3013	0.0	25.02	180.04	3013	0.0	26.27	44.93
35		5	10302.0	10400	0.0	137.55	1680.22	10400	0.0	160.15	1084.91
36	800	10	9833.3	9934	0.0	241.72	3598.48	9934	0.64	265.48	3600
37		80	5057.0	5057	0.0	43.67	277.61	5057	0.0	43.20	61.18
38		5	10947.1	11060	0.0	77.53	2129.25	11071	1.12	326.71	359.38(OUM)
39	900	10	9364.2	9423	0.0	199.31	2380.41	9652	2.98	239.49	266.53(OUM)
40		90	5128.0	5128	0.0	74.61	392.15	5128	0.0	69.87	86.04

Tablo 3. ORL1 problemleri için hesaplama sonuçları

Pr.No. N	p	z_{LP}^*	R-ÇMATP			TMATP				
			BP	Gap (%)	T_{LP}	T_{top}	BP	Gap (%)	T_{LP}	T_{top}
1	5	5819.0	5819	0.0	0.09	0.84	5819	0.0	0.09	3600
2	10	4088.5	4093	0.0	0.05	0.74	4093	0.0	0.05	3600
3	100	4240.5	4250	0.0	0.03	0.96	4250	0.0	0.03	3600
4	20	3034.0	3034	0.0	0.03	0.65	3034	0.0	0.03	3600
5	33	1355.0	1355	0.0	0.03	0.65	1355	0.0	0.03	3600
6	5	7783.5	7824	0.0	0.16	5.97	7824	0.0	0.16	3600
7	10	5631.0	5631	0.0	0.45	3.53	5631	0.0	0.45	3600
8	200	4445.0	4445	0.0	0.28	3.23	4445	0.0	0.28	3600
9	40	2734.0	2734	0.0	0.23	3.10	2734	0.0	0.23	3600
10	67	1255.0	1255	0.0	0.20	3.04	1255	0.0	0.20	3600
11	5	7693.3	7696	0.0	1.25	12.74	7696	0.0	1.25	3600
12	10	6625.8	6634	0.0	1.75	10.06	6634	0.0	1.75	3600
13	300	4374.0	4374	0.0	0.70	6.73	4374	0.0	0.70	3600
14	60	2967.2	2968	0.0	0.84	8.64	2968	0.0	0.84	3600
15	100	1729.0	1729	0.0	0.73	8.16	1729	0.0	0.73	3600
16	5	8092.0	8162	0.0	6.80	41.34	8162	0.0	6.80	3600
17	10	6968.7	6999	0.0	0.92	23.75	6999	0.0	0.92	3600
18	400	4808.5	4809	0.0	0.34	17.65	4809	0.0	0.34	3600
19	80	2845.0	2845	0.0	1.61	14.86	2845	0.0	1.61	3600
20	133	1789.0	1789	0.0	1.64	15.13	1789	0.0	1.64	3600
21	5	9138.0	9138	0.0	6.97	33.49	9138	0.0	6.97	3600
22	10	8544.0	8579	0.0	20.30	80.43	8579	0.0	20.30	3600
23	500	4619.0	4619	0.0	4.33	28.35	4619	0.0	4.33	3600
24	100	2961.0	2961	0.0	4.30	29.85	2961	0.0	4.30	3600
25	167	1828.0	1828	0.0	3.20	27.14	1828	0.0	3.20	3600
26	5	9853.8	9917	0.0	52.50	137.25	9924	45.5	0.02	3600
27	10	8301.8	8307	0.0	35.16	95.91	8516	41.1	0.02	3600
28	600	4498.0	4498	0.0	9.27	50.51	4601	19.9	0.03	3600
29	120	3033.0	3033	0.0	6.77	45.12	3038	9.2	0.02	3600
30	200	1989.0	1989	0.0	5.50	42.73	1989	2.7	0.03	3600
31	5	10026.0	10086	0.0	60.28	184.92	10101	48.5	0.02	3600
32	10	9292.6	9297	0.0	75.89	156.84	9612	35.2	0.03	3600
33	700	4700.0	4700	0.0	15.44	76.23	4798	20.9	0.03	3600
34	140	3013.0	3013	0.0	11.86	70.06	3031	9.8	0.03	3600
35	5	10302.0	10400	0.0	93.94	465.58	10465	49.9	0.03	3600
36	800	9833.3	9934	0.0	141.28	2980.34	10131	44.5	0.03	3600
37	80	5057.0	5057	0.0	20.06	89.35	5177	19.6	0.03	3600
38	5	10947.1	11060	0.0	207.23	1090.96	11188	50.83	0.05	3600
39	900	9364.2	9423	0.0	106.47	542.43	9559	44.2	0.05	3600
40	90	5128.0	5128	0.0	30.17	150.88	5245	19.7	0.05	3600

Tablo 4. ÇMATP-Benders Algoritmasının test sonuçları

Pr.No. N	p	z^i	R-ÇMATP				ÇMATP				
			BP	LB	Gap (%)	T_{top}	BP	LB	Gap (%)	T_{top}	
1	5	5819	5819	5819	0.0	5.79	5819	5819	0.0	11.88	
2	10	4093	4093	4093	0.0	5.62	4093	4093	0.0	4.80	
3	100	10	4250	4250	4250	0.0	3.21	4250	4250	0.0	7.48
4	20	3034	3034	3034	0.0	3.41	3034	3034	0.0	4.48	
5	33	1355	1355	1355	0.0	5.11	1355	1355	0.0	3.19	
6	5	7824	7824	7824	0.0	3.94	7824	7824	0.0	6.06	
7	10	5631	5631	5631	0.0	5.14	5631	5631	0.0	5.69	
8	200	20	4445	4445	4445	0.0	6.73	4445	4445	0.0	9.03
9	40	2734	2734	2734	0.0	7.21	2734	2734	0.0	8.00	
10	67	1255	1255	1255	0.0	7.04	1255	1255	0.0	10.60	
11	5	7696	7696	7696	0.0	24.76	7696	7696	0.0	16.23	
12	10	6634	6634	6634	0.0	20.29	6634	6634	0.0	19.44	
13	300	30	4374	4374	4374	0.0	22.98	4374	4374	0.0	40.14
14	60	2968	2968	2968	0.0	14.81	2968	2968	0.0	30.06	
15	100	1729	1729	1729	0.0	16.37	1729	1729	0.0	18.99	
16	5	8162	8162	8162	0.0	95.38	8162	8162	0.0	243.91	
17	10	6999	6999	6999	0.0	97.80	6999	6999	0.0	268.91	
18	400	40	4809	4809	4809	0.0	14.60	4809	4809	0.0	96.74
19	80	2845	2845	2845	0.0	84.85	2845	2845	0.0	155.50	
20	133	1789	1789	1789	0.0	171.17	1789	1789	0.0	74.30	
21	5	9138	9138	9138	0.0	252.28	9138	9138	0.0	296.55	
22	10	8579	8579	8579	0.0	467.79	8579	8579	0.0	461.71	
23	500	50	4619	4619	4619	0.0	363.90	4619	4619	0.0	478.73
24	100	2961	2961	2961	0.0	351.39	2961	2961	0.0	936.10	
25	167	1828	1828	1828	0.0	500.52	1828	1828	0.0	327.40	
26	5	9917	9917	9917	0.0	973.37	9917	9917	0.0	1373.85	
27	10	8307	8307	8307	0.0	842.37	8307	8307	0.0	898.75	
28	600	60	4498	4498	4498	0.0	762.96	4498	4498	0.0	697.51
29	120	3033	3033	3033	0.0	988.14	3033	3033	0.0	834.68	
30	200	1989	1989	1989	0.0	584.03	1989	1989	0.0	1086.68	
31	5	10086	10086	10086	0.0	808.70	10086	10086	0.0	1584.68	
32	10	9297	9297	9297	0.0	1290.45	9297	9297	0.0	1792.16	
33	700	70	4700	4700	4700	0.0	1360.12	4700	4700	0.0	1800.25
34	140	3013	3013	3013	0.0	1837.70	3013	3013	0.0	2458.55	
35	5	10400	10400	10400	0.0	1595.52	10400	10400	0.0	2396.67	
36	800	10	9934	9934	9934	0.0	1217.87	9934	9934	0.0	1980.63
37	80	5057	5057	5057	0.0	1212.13	5057	5057	0.0	2016.37	
38	5	11060	11060	11060	0.0	1740.31	11060	11060	0.0	3156.45	
39	900	10	9423	9423	9423	0.0	1771.40	9423	9423	0.0	2653.01
40	90	5128	5128	5128	0.0	2324.04	5128	5128	0.0	3424.41	

4.2 Ayırıt Kapasiteli p-Ortanca Problemi

Ayırıt kapasiteli p-ortanca problemine ilişkin hesaplama testleri, ORL1 problemleri kullanılarak yapılmıştır. Testlerin birinci bölümünde, AKÇAMTP'nin performansı CPLEX kullanılarak test edilmiştir. CPLEX'in en fazla 10 saat çalışmasına müsaade edilmiştir. Testlerin ikinci

bölümünde ise, problem için geliştirilen Lagrange Gevşetmesine dayalı AKÇMATP-Lagrange Algoritmasının performansı test edilmiştir. Testlerde, problem boyutu büyüdükçe AKÇMATP ile bir çözüm elde etmenin mümkün olmadığı görülmüştür. Söz konusu problemler için, AKÇMATP-Lagrange Algoritması ile çözüm bulunabilmiştir ancak sonuçların daha da iyileştirilmesi için, ilerleyen süreçte, ilave kısıtların da gevşetildiği bir algoritmanın geliştirilebileceği değerlendirilmektedir. Bazı problemlerin çözümü çok kolay olduğu için sadece zor olan bazı problemler için test sonuçları **Tablo 5**'te verilmiştir.

Tablo 5. AKÇMATP ve AKÇMATP-Lagrange Algoritmasının hesaplama sonuçları

Pr.No.	N	p	cap _{ij}	AKÇMATP				AKÇMATP-Lagrange				
				z_{LP}^*	BP	LB	Gap (%)	T _{top}	BP	LB	Gap (%)	T _{top}
6	200	5	5	8066.3	9884	8565.6	13.3	36000	9123	8668	5.0	3467
6	200	5	10	7806.4	8048	8048	0.0	480	8048	8048	0.0	435
7	200	10	5	5836.7	6236	6236	0.0	16080	6236	6236	0.0	763
11	300	5	5	8263.1	ÇÖZÜM YOK			36000	ÇÖZÜM YOK			
11	300	5	10	7846.4	8795	8067	8.3	36000	8679	8367	3.6	2654
11	300	5	15	7748.5	8066	8066	0.0	3834	8066	8066	0.0	1356
12	300	10	5	6892.9	7675	7174.7	0.0	36000	7543	7378	2.2	1987
16	400	5	5	8931.3	16395	9010.8	45	36000	11897	10537	11.4	4239
16	400	5	10	8305.6	10280	8348.3	18.8	36000	9675	9263	4.3	1765
16	400	5	15	8155.8	8686	8344.9	3.9	36000	8413	8287	1.5	1123
16	400	5	20	8117.9	8349	8349	0.0	5543	8349	8349	0.0	367
17	400	10	5	7211.1	9477	7254.4	23.5	36000	8607	7734	10.1	1156
17	400	10	10	6981.7	7089	7089	0.0	1345	7089	7089	0.0	781
21	500	5	10	9552.3	11708	11708	18.1	36000	10457	9675	7.5	7965
21	500	5	15	9319.7	9922	9490.9	4.3	36000	9784	9589	2.0	5365
21	500	5	20	9213.5	9254	9254	0.0	897	9367	9254	1.2	3125
22	500	10	5	8853.8	ÇÖZÜM YOK			36000	ÇÖZÜM YOK			
22	500	5	10	8612.1	9133	9133	4.6	36000	9457	9256	2.1	5442
22	500	10	15	8572.5	8690	8690	0.0	4321	8690	8690	0.0	1263
26	600	5	10	ÇÖZÜM YOK			808.70	ÇÖZÜM YOK				
26	600	5	15	9961.1	11333	10046.5	11.4	36000	9297	9297	4.3	9478
26	600	5	20	9887.9	10633	9958.9	6.4	36000	4700	4700	1.9	6492
27	600	10	5	8903.9	ÇÖZÜM YOK			36000	ÇÖZÜM YOK			
27	600	10	10	8498.8	9271	8566.4	7.6	36000	11034	10565	4.1	6543
27	600	10	15	8370.7	8732	8467.3	3.0	36000	10456	10256	1.4	3452
27	600	10	20	8325.5	8453	8453	0.0	9786	9245	8869	0.0	654
31	700	5	15	OUM					8698	8579	6.9	13067
31	700	5	20	OUM					8453	8453	4.3	6127
32	700	10	10	OUM					11678	10876	5.4	7653
32	700	10	15	OUM					11245	10763	3.1	3278
35	800	5	15	OUM					10234	9678	6.5	15674
35	800	5	20	OUM					9978	9673	9.8	12453
36	800	10	10	OUM					11378	10643	4.7	9437
36	800	10	15	OUM					10890	9821	3.5	5324
38	900	5	15	OUM					10884	10375	7.9	17987
38	900	5	20	OUM					10656	10278	6.9	15439
39	900	10	15	OUM					12776	11765	4.6	13675
39	900	10	20	OUM					12456	11598	3.4	8675

4.3 Dügüm Kapasiteli p-Ortanca Problemi

Dügüm kapasiteli p-ortanca problemi için, DKÇMATP1 ve dügüm kapasiteli CF'nin performansı CPLEX kullanılarak test edilmiştir. DKÇMATP1, ORL1 ve CF, ORL2 problemleri kullanılarak çözülmüştür. Dügümlerdeki talep miktarları, [1,100] üniform dağılımdan tamsayı

$$W_j = \alpha \times \sum_{k \in D} w_k$$

rassal sayılar üretilerek belirlenmiştir. Dügüm kapasiteleri, olacak şekilde hesaplanmıştır. α değerleri, [0.82,0.96] üniform dağılımdan rassal olarak seçilmiştir. **Tablo 6**'da, DKÇMATP1 ve kapasiteli CF'nin hesaplama sonuçları sunulmuştur. Sonuçlar, çözüm zamanları ve nihai optimaliteden uzaklık seviyeleri bakımından, DKÇMATP1'in daha iyi performans gösterdiğini ortaya koymuştur.

Tablo 6. DKÇMATP1 ve dügüm kapasiteli CF hesaplama sonuçları

Pr. No.	CF				DKÇMATP1					
	z_{LP}^i	T_{LP}	BP	Gap (%)	T_{top}	z_{LP}^i	T_{LP}	BP	Gap (%)	T_{top}
1	58584.6	0.4	58878	0.0	18	58584.5	0.33	58878	0.0	9
2	42293.2	0.9	42547	0.0	35	42293.2	0.67	42547	0.0	34
3	46767.4	0.7	47225	0.0	77	46767.4	0.56	47225	0.0	45
4	30572.3	0.3	31115	0.0	52	30572.2	0.28	31115	0.0	26
5	15735.6	0.3	18634	0.0	4147	15735.6	0.25	18634	0.0	1172
6	75393.3	9.3	75517	0.0	101	75393.3	8.02	75519	0.0	83
7	55482.7	7.7	55648	0.0	101	55482.7	6.66	55648	0.0	144
8	44207.1	8.6	44778	0.0	5006	44207.1	5.41	44778	0.0	2457
9	26746.9	3.6	27757	0.0	23748	26746.9	1.47	27757	0.0	14978
10	12768.7	3.5	18100	10.02	36000	12768.7	2.34	17679	7.69	36000
11	77042.6	48.1	77221	0.0	531	77042.5	42.53	77219	0.0	448
12	68889.2	54.4	69258	0.08	36000	68889.2	46.35	69259	0.08	36000
13	44764.6	48.7	45686	1.3	36000	44764.6	30.95	45654	1.27	36000
14	29439.4	18.3	32120	6.18	36000	29439.3	9.89	31729	4.59	36000
15	16145.5	9.0	19003	5.45	36000	16145.5	4.63	18991	4.52	36000
16	83517.9	35.6	83565	0.0	86	83517.9	38.06	83562	0.0	106
17	72299.4	46.8	72553	0.0	2310	72299.4	35.26	72552	0.0	901
18	49130.9	94.1	49630	0.38	36000	49130.9	51.99	49585	0.3	36000
19	29048.8	73.3	31778	6.59	36000	29048.8	31.53	31681	6.01	36000
20	18552.8	29.6	23069	9.32	36000	18552.7	15.12	22077	4.58	36000
21	92514.2	24.7	92521	0.0	45	92514.2	20.25	92523	0.0	38
22	85585.6	150.1	85879	0.0	1971	85585.6	101.01	85880	0.0	819
23	46348.0	266.9	47401	1.92	36000	46348.0	138.65	47024	1.05	36000
24	30123.9	261.1	329661	6.6	36000	30123.9	65.21	32846	6.05	36000
25	18255.2	72.9	23041	12.26	36000	18255.2	45.86	22748	11.24	36000
26	101838.6	450.4	102694	0.0	30338	101838.6	330.67	102694	0.16	36000
27	86737	487.4	87155	0.02	36000	86737	449.19	87149	0.0	30336
28	46158.6	397.9	47410	2.46	36000	46158.6	157.05	47126	1.86	36000
29	31881.5	380.6	34716	6.21	36000	31881.4	127.22	35035	6.96	36000
30	21363.1	152.2	32228	23.45	36000	21363.1	1.907	30533	19.05	36000
31	103445.4	417.9	104053	0.0	7054	103445.4	482.15	104049	0.0	5815
32	96136.3	585.6	96269	0.0	2491	96136.3	513.54	96269	0.0	1572

33	47545.9	564.3	48491	1.8	36000	47545.9	229.91	48310	1.44	36000
34	31125.6	245.4	33392	5.42	36000	31125.6	115.83	32820	3.63	36000
35-40 OUM										

DKÇMATP1 ve DKÇMATP2’Nin çözümü için geliştirilen Lagrange ve Benders tabanlı algoritmalara ilişkin yapılan test sonuçları Tablo 7’de sunulmuştur. Sonuçlar, kabul edilebilir süreler içinde, her iki algoritmanın iyi çözümler üretebildiğini göstermiştir. Genel olarak, Lagrange algoritmasının daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir.

Tablo 7. DKÇMATP1-Lagrange ve DKÇMATP2-Benders algoritmalarının hesaplama sonuçları

Pr. No.	DKÇMATP1-Lagrange				DKÇMATP2-Benders			
	LB	BP	Gap (%)	T_{top}	LB	BP	Gap (%)	T_{top}
1	58878	58878	0.0	5	58449	59328	1.48	5
2	42547	42547	0.0	8	42350	42724	0.88	7
3	47225	47225	0.0	11	46874	47637	1.60	11
4	30987	31115	0.4	35	30816	31347	1.70	38
5	18634	18634	0.0	232	18568	18818	1.33	252
6	75517	75517	0.0	13	75468	76261	1.04	12
7	55648	55648	0.0	67	55462	55719	0.46	87
8	44327	44778	1.0	325	44255	45005	1.67	303
9	27597	27757	0.6	587	27350	27888	1.93	617
10	16785	17476	4.0	3769	16689	17607	5.22	2357
11	75876	77219	1.7	2398	75609	77297	2.18	3219
12	69217	69259	0.1	3323	68637	69459	1.18	3765
13	45278	45679	0.9	2678	45135	45992	1.86	2235
14	31365	31762	1.2	1684	31293	31991	2.18	1876
15	18279	18765	2.6	3197	18273	18820	2.90	4321
16	83562	83562	0.0	134	82852	83816	1.15	387
17	71876	72552	0.9	167	71407	72937	2.10	356
18	49395	49585	0.4	832	48924	49742	1.65	793
19	30487	31567	3.4	1995	30251	31606	4.29	1789
20	21577	21892	1.4	3523	21400	21990	2.68	2786
21	92520	92654	0.1	32	92458	93058	0.64	89
22	85880	85880	0.0	145	85715	86640	1.07	96
23	46560	47276	1.5	1456	46272	47388	2.36	1167
24	31567	32754	3.6	4231	31283	32839	4.74	3698
25	20567	21675	5.1	3654	20484	21862	6.30	4321
26	102045	102694	0.6	2569	101034	103458	2.34	2552
27	87149	88235	1.2	478	87049	88466	1.60	320
28	46769	47200	0.9	1567	46561	47499	1.98	2230
29	33078	34432	3.9	3671	32999	34686	4.86	3376
30	26653	29124	8.5	5472	26619	28675	7.17	5372
31	104049	104049	0.0	432	103595	104615	0.97	438
32	96269	97323	1.1	658	96188	98060	1.91	569
33	47976	48432	0.9	1679	47574	48869	2.65	1783
34	31787	32965	3.6	5487	31565	33106	4.65	5752
35	105321	107378	1.9	762	104667	108369	3.42	778
36	98321	101387	3.0	4321	97842	102154	4.22	3589
37	49543	52237	5.2	3678	49074	52471	6.47	4568
38	112498	115657	2.7	1274	111610	115977	3.76	876
39	94321	96237	2.0	4765	94055	96452	2.49	3896

40	56567	61879	8.6	6465	56468	62487	9.63	5439
----	-------	-------	-----	------	-------	-------	------	------

4.4 Karma Kapasiteli p-Ortanca Problemi

Karma kapasiteli p-ortanca problemi için geliştirilen KKÇMATP, CPLEX kullanılarak çözülmeye çalışılmış ancak küçük çaplı problemler dışında, bellek sorunu yaşanmıştır. Bu nedenle, bu bölümde sadece Lagrange tabanlı KKÇMATP-Lagrange algoritmasına ilişkin hesaplama sonuçları sunulmuştur. **Tablo 8'**deki sonuçlar, kabul edilebilir süreler içerisinde iyi çözümlerin bulunabildiğini göstermektedir.

Tablo 8. KKÇMATP-Lagrange algoritmasının hesaplama sonuçları

Pr. No.	KKÇMATP-Lagrange			
	LB	BP	Gap (%)	T_{top}
1	74186	76076	2.5	8
2	52333	52776	0.8	11
3	57142	58411	2.2	17
4	38734	39231	1.3	53
5	22361	23929	6.6	385
6	94396	95543	1.2	19
7	69560	71201	2.3	103
8	56295	58674	4.1	517
9	34496	34727	0.7	986
10	20478	20990	2.4	6257
11	94845	98892	4.1	3501
12	85829	90408	5.1	4619
13	56598	57222	1.1	4285
14	40775	42306	3.6	2341
15	23032	24578	6.3	4412
16	107795	109543	1.6	218
17	91283	92654	1.5	252
18	60262	62710	3.9	1082
19	37499	38856	3.5	2733
20	27619	28046	1.5	5778
21	116575	117569	0.8	42
22	110785	114879	3.6	220
23	59131	60064	1.6	2068
24	40721	41652	2.2	6304
25	25297	28290	10.6	5408
26	123474	132124	6.5	3776
27	111551	115663	3.6	645
28	58461	59276	1.4	2053
29	39694	44493	10.8	5250
30	32783	36417	10.0	8755
31	130061	133919	2.9	566
32	119374	119902	0.4	1053
33	59010	61374	3.9	2418
34	39098	40205	2.8	7682
35	136917	137588	0.5	1166
36	119952	130014	7.7	7346
37	64406	66235	2.8	6032
38	141747	149398	5.1	2026
39	116958	120637	3.0	6766

40	68446	74896	8.6	9116
----	-------	-------	-----	------

4.5 Kapasitesiz p-Hub Ortanca Problemi

Kapasitesiz p-hub ortanca problemi için geliştirilen modeller ÇMATHP ve R-ÇMATHP ile literatürdeki modeller EK ve MCL'nin performansı, Tablo 1'deki problemler kullanılarak karşılaştırılmıştır. Testlerde, CPLEX'in en fazla 18000 saniye çalışmasına müsaade edilmiştir. Elde edilen sonuçlar, **Tablo 9** ve **Tablo 10**'da sunulmuştur. Önerilen modellerin LP gevşetmeleri literatürdeki modellere nazaran daha kötü olmasına rağmen, daha iyi çözümler ürettiği görülmüştür. Özellikle, üçgen eşitsizliğinin sağlanmadığı durumlarda kullanılabilen MCL'nin performansının kötü olduğu görülmektedir. Bu sonuç, ÇMATHP gibi esnek bir yapıya sahip olan bir modelin mevcut yaklaşımlar ile modellenmesinin ve çözümünün de zor olacağına önemli bir göstergesidir.

Tablo 9. ÇMATHP ve R-ÇMATHP modellerine ilişkin hesaplama sonuçları

Pr. No.	R-ÇMATHP				ÇMATHP							
	z_{LP}^*	$T_{LP}BP$	LB	Gap (%)	T_{top}	z_{LP}^*	$T_{LP}BP$	LB	Gap (%)	T_{top}		
1	95056	4	126682	126682	0.0	301	95056	3	126682	126682	0.00	197
2	91665	3	114076	114076	0.0	1090	91665	2	114076	114076	0.00	1475
3	88162	2	103003	103003	0.0	1666	88162	2	103003	103003	0.00	3393
4	91522	9	125785	125785	0.0	3366	91522	10	125785	125785	0.00	4781
5	87957	5	114076	114076	0.0	11541	87957	11	114076	91832	8.05	18000
6	84359	2	103424	97389	5.8	18000	84359	9	103432	94151	8.97	18000
7	81834	2	94676	92406	2.4	18000	81834	5	94973	89880	5.36	18000
8	80859	1	91289	90104	1.3	18000	80859	3	91305	87940	3.69	18000
9	90494	7	125785	125785	0.0	3826	90494	19	125785	125785	0.00	11953
10	86893	5	114076	114076	0.0	4900	86893	16	114363	93573	18.2	18000
11	83242	5	102765	96155	6.4	18000	83242	21	103399	93193	9.87	18000
12	80698	3	94061	91306	2.9	18000	80698	19	94113	89009	5.42	18000
13	79709	3	91093	88923	2.4	18000	79709	9	91404	87153	4.65	18000
14	88297	9	119594	119594	0.0	5009	88297	43	119594	100535	15.9	18000
15	84547	5	113027	98835	12.6	18000	84547	35	114076	96686	15.2	18000
16	81000	3	101793	94446	7.2	18000	81000	29	102235	92141	9.87	18000
17	78464	3	93563	89641	4.2	18000	78464	19	95385	88324	7.4	18000
18	77500	2	90572	87502	3.4	18000	77500	14	92145	86486	6.15	18000

Tablo 10. Literatürdeki EK ve MCL modellerine ilişkin hesaplama sonuçları

Pr. Id.	EK					MCL						
	z_{LP}^*	$T_{LP}BP$	BP	LB	Gap (%)	T_{top}	z_{LP}^*	$T_{LP}BP$	BP	LB	Gap (%)	T_{top}
1	126201	812	126682	126682	0.00	1203	126201	2058	126682	126682	0.00	2862
2	113163	567	114076	114076	0.00	835	113163	769	114076	114076	0.00	1560
3	101653	439	103003	103003	0.00	1178	101653	684	103003	103003	0.00	2141
4	125201	2514	125785	125785	0.00	3909	125201	9427	125785	125785	0.00	12652
5	112586	1885	114076	114076	0.00	5783	112586	7023	114146	113505	0.56	18000
6	100624	2177	103352	102993	0.35	18000	100624	5454	103226	101809	0.00	18000
7	92869	1964	94676	93890	0.83	18000	92869	3080	95034	93396	1.72	18000
8	89899	1728	91289	90670	0.67	18000	89899	2009	91289	90538	0.82	18000
9	125200	4197	125785	125785	0.00	5502	No Solution					
10	112364	2829	114076	114076	0.00	11075	No Solution					
11	100167	3230	102476	100984	1.47	18000	100167	5829	102235	100933	1.27	18000

12	92502	2610	94061	93132	0.99	18000	92502	4387	939721	930897	0.94	18000
13	89591	2731	91149	90030	1.23	18000	89591	4218	91404	90033	1.50	18000
14	119575	4950	119594	119594	0.00	4869	No Solution					
15	110885	8338	112671	111548	0.99	18000	No Solution					
16	99335	5537	101956	99602	2.31	18000	99335	14705	107111	99453	7.15	18000
17	91733	4852	93632	91915	1.83	18000	91733	11407	94900	91884	3.18	18000
18	88983	4752	90756	89177	1.74	18000	88983	13540	92531	89106	3.70	18000

Tablo 11'de ÇMATHP'nin çözümü için önerilen sezgisel algoritma RFHEUR'ın hesaplama sonuçları ve kullanılan problemlerin bilinen en iyi çözümlerine karşılık gelen amaç fonksiyon değerleri (BP^{best}) ile karşılaştırılması sunulmuştur. Sonuçlar, önerilen sezgisel algoritmanın çok kısa süreler içinde optimale yakın çözümler üretebildiğini göstermektedir.

Tablo 11. Sezgisel yöntem RFHEUR'e ilişkin hesaplama sonuçları

Pr. Id.	BP^{best}	RFHEUR ($k=1$)		RFHEUR ($k=2$)		Gap_Heur (%)	
		BP^{Heur}	Time (secs)	BP^{Heur}	Time (secs)	$k=1$	$k=2$
1	126682	128131	9	126682	6	1.14	0.00
2	114076	116037	4	116037	7	1.72	1.72
3	103003	103939	5	103227	15	0.91	0.22
4	125785	128131	3	126682	5	1.87	0.71
5	114076	115161	3	115161	7	0.95	0.95
6	103227	104987	3	104426	15	1.71	1.16
7	94676	96521	3	95647	48	1.95	1.03
8	91289	95529	2	92887	76	4.64	1.75
9	125785	128131	3	126682	4	1.87	0.71
10	114076	115161	4	115161	6	0.95	0.95
11	102235	104678	10	104101	16	2.39	1.82
12	93972	96415	4	94713	32	2.60	0.79
13	91093	94436	9	91418	158	3.67	0.36
14	119594	119941	3	119941	3	0.29	0.29
15	112671	115837	4	115488	8	2.81	2.50
16	101793	104460	4	103800	8	2.85	2.20
17	93563	96118	5	94580	15	2.73	1.09
18	90572	93797	3	93389	22	3.56	3.11
	Maks					4.64	3.11
	Min					0.29	0.00
	Ortalama					2.14	1.19

4.6 Ayrıt Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi

Ayrıt kapasiteli p-hub ortanca problemi için geliştirilen AKÇMATHP modeli ve Lagrangean gevşetmesi tabanlı algoritma ile yapılan hesaplama testlerinin sonuçları **Tablo 12'**de sunulmuştur. Test problemlerinin oluşturulması için, kapasitesiz problemin çözümleri incelenmiş ve kapasitesiz çözümü olursuz kılacak şekilde ayrıt kapasiteleri belirlenmiştir. CPLEX ile tüm problemler için olurlu çözümler bulunmuştur ancak nihai optimaliteden uzaklık seviyeleri yüksektir. Lagrange Algoritması ile kabul edilebilir seviyede çözümler elde

edilmiştir ancak sonuçların daha da iyileştirilmesi için, ilave kısıtların aynı anda gevşetildiği bir algoritmanın da geliştirilebileceği değerlendirilmektedir.

Tablo 12. AKÇMATHP modeli ve AKÇMATHP-Lagrange algoritmasının hesaplama sonuçları

Pr. No.	AKÇMATHP					AKÇMATHP-Lagrange				
	Z_{LP}^*	T_{LP}	BP	LB	Gap (%)	T_{top}	BP	LB	Gap (%)	T_{top}
1	101710	15	122567	111881	8.7	18000	123765	117543	5.0	475
2	107248	54	127765	118754	7.1	18000	119568	118235	1.1	1125
3	97860	105	118453	115467	2.5	18000	119097	117664	1.2	1653
4	108911	35	145911	130567	10.5	18000	130548	126982	2.7	2387
5	102030	89	135750	119415	12.0	18000	124477	112233	9.8	4329
6	99544	167	129876	111734	14.0	18000	124124	113547	8.5	6532
7	93291	365	123453	98765	20.0	18000	112789	109389	3.0	7854
8	96222	453	137654	104376	24.2	18000	110063	108731	1.2	8675
9	98638	56	138364	116589	15.7	18000	119869	116545	2.8	4432
10	97320	96	131517	110945	15.6	18000	118654	114567	3.4	5789
11	92399	234	129145	103287	20.0	18000	107183	99791	6.9	6731
12	87154	432	125432	99256	20.9	18000	107199	98763	7.9	8754
13	93260	542	125423	102786	18.0	18000	113777	105465	7.3	7683
14	94478	76	132749	118097	11.0	18000	110539	106760	3.4	3456
15	98920	94	135987	107654	20.8	18000	121567	109801	9.7	5769
16	89910	365	119615	97698	18.3	18000	107892	100699	6.7	6239
17	86310	423	121543	95123	21.7	18000	104435	98567	5.6	8756
18	90675	532	136543	103370	24.3	18000	104276	97929	6.1	9562

4.7 Hub Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi

Hub kapasiteli p-hub ortanca problemi için geliştirilen HKÇMATHP modeli ve Lagrangean gevşetmesi tabanlı algoritma ile yapılan hesaplama testlerinin sonuçları **Tablo 13**'te sunulmuştur. Test problemlerinin oluşturulması için, kapasitesiz problemin çözümleri incelenmiş ve kapasitesiz çözümü olursuz kılacak şekilde hub kapasiteleri belirlenmiştir. CPLEX ile tüm problemler için olurlu çözümler bulunmuştur ancak nihai optimaliteden uzaklık seviyeleri yüksektir. Lagrange Algoritması ile kabul edilebilir seviyede çözümler elde edilmiştir ancak sonuçların daha da iyileştirilmesi için, ilave kısıtların aynı anda gevşetildiği bir algoritmanın da geliştirilebileceği değerlendirilmektedir.

Tablo 13. HKÇMATHP modeli ve HKÇMATHP-Lagrange algoritmasının hesaplama sonuçları

Pr. No.	HKÇMATHP					HKÇMATHP-Lagrange				
	Z_{LP}^*	T_{LP}	BP	LB	Gap (%)	T_{top}	BP	LB	Gap (%)	T_{top}
1	98858	56	131749	117654	10.7	18000	132764	126587	4.7	679
2	92582	89	115217	104567	9.2	18000	113657	106567	6.2	789
3	90807	87	106093	99876	5.9	18000	103268	100329	2.8	1387
4	92437	76	127043	112456	11.5	18000	118398	109876	7.2	1876
5	89716	167	116358	105549	9.3	18000	113131	107356	5.1	3678
6	86046	387	105501	97654	7.4	18000	104789	98568	5.9	4734
7	84289	236	97822	89478	8.5	18000	95673	89678	6.3	5409
8	84093	374	94957	90352	4.8	18000	93876	91234	2.8	5897
9	92304	43	128301	109765	14.4	18000	122678	112568	8.2	3675
10	88631	89	116650	103876	11.0	18000	113675	102876	9.5	4539
11	86572	378	107535	93567	13.0	18000	104535	94187	9.9	4276
12	82312	765	95995	89876	6.4	18000	97567	88543	9.2	6129
13	81303	651	93232	86453	7.3	18000	93232	89125	4.4	4357
14	91829	104	124378	103567	16.7	18000	119659	109368	8.6	2976
15	87083	233	117498	98723	16.0	18000	118365	105879	10.5	3658
16	81810	635	103257	85676	17.0	18000	98653	89684	9.1	5632
17	81603	763	99200	85981	13.3	18000	97890	90363	7.7	6364
18	80600	612	95831	84789	11.5	18000	93567	86732	7.3	7125

Tablo 14. KKÇMATHP modeli ve KKÇMATHP-Lagrange algoritmasının hesaplama sonuçları

Pr. No.	KKÇMATHP					KKÇMATHP-Lagrange				
	Z_{LP}^*	T_{LP}	BP	LB	Gap (%)	T_{top}	BP	LB	Gap (%)	T_{top}
1	105778	17	127470	116356	8.7	18000	124580	119069	4.4	856
2	116900	65	132876	124692	6.2	18000	122540	119221	2.7	892
3	99817	118	130298	116622	10.5	18000	125038	116278	7.0	1595
4	118713	42	153207	143624	6.3	18000	130035	126419	2.8	2626
5	105091	93	137108	131357	4.2	18000	125009	115410	7.7	4340
6	102530	189	138967	115086	17.2	18000	123550	115730	6.3	6391
7	95157	416	127157	108642	14.6	18000	120376	110598	8.1	6004
8	104882	480	140407	108551	22.7	18000	110310	107153	2.9	7076
9	104556	59	150817	123584	18.1	18000	115952	110507	4.7	4447
10	107052	113	135463	117602	13.2	18000	117160	105713	9.8	5991
11	93323	264	136894	110517	19.3	18000	117025	109245	6.6	4875
12	94126	501	137975	104219	24.5	18000	106757	101759	4.7	7232
13	94193	591	134203	108953	18.8	18000	109411	100716	7.9	5446
14	97312	91	136731	122821	10.2	18000	110723	105744	4.5	3363
15	100898	102	146866	115190	21.6	18000	121374	111915	7.8	4207
16	96204	391	129184	103560	19.8	18000	108822	101821	6.4	6308
17	92352	457	128836	103684	19.5	18000	107466	98483	8.4	7191

4.8 Karma Kapasiteli p-Hub Ortanca Problemi

Karma kapasiteli p-hub ortanca problemi için geliştirilen KKÇMATHP modeli ve Lagrangean gevşetmesi tabanlı algoritma ile yapılan hesaplama testlerinin sonuçları **Tablo 14**'te sunulmuştur. Test problemlerinin oluşturulması için, kapasitesiz problemin çözümleri incelenmiş ve kapasitesiz çözümü olursuz kılacak şekilde hub ve ayırıt kapasiteleri belirlenmiştir. CPLEX ile tüm problemler için olurlu çözümler bulunmuştur ancak nihai optimaliteden uzaklık seviyeleri yüksektir. Lagrange Algoritması ile kabul edilebilir seviyede çözümler elde edilmiştir ancak sonuçların daha da iyileştirilmesi için, ilave kısıtların aynı anda gevşetildiği bir algoritmaların da geliştirilebileceği değerlendirilmektedir.

4.9 Ağaç Yapılı p-Hub Ortanca Problemi

Ağaç yapılı p-hub ortanca problemi kapsamında geliştirilen modeller AYÇMATHP1, AYÇMATHP2 ve AYÇMATHP3'nin performansının test edilmesi için, Türkiye karayolları ağı esas alınarak oluşturulan 30 düğümlük tam olmayan serim yapısı üzerinde problemler tanımlanmış ve CPLEX ile çözülmüştür. Sonuçlar, AYÇMATHP1'in daha kısa sürede daha iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir. Bu çerçevede, Türkiye karayolları ağı esas alınarak oluşturulan 40 düğümlük yeni problemler oluşturulmuş ve AYÇMATHP1 ile sezgisel algoritma AYÇMATHP-Sezgisel'in sonuçları karşılaştırılmıştır. Sonuçlar, **Tablo 15**'te sunulmuştur. Aynı problemler için, **Tablo 16**'da AYÇMATHP1-Benders algoritmasının hesaplama sonuçları verilmiştir. Sonuçlar incelendiğinde, sezgisel algoritmanın çok kısa süreler içinde, iyi çözümler verdiği görülmektedir. Aynı şekilde, Benders algoritması ile iyi çözümler elde edilebilmektedir ancak çözüm zamanlarının geliştirilmesine ihtiyaç vardır.

Tablo 15. AYÇMATHP1 ve AYÇMATHP-Sezgisel algoritmasının hesaplama sonuçları

Pr. Id.	AYÇMATHP1						AYÇMATHP1-Sezgisel		Gap (%)
	H	p	BP	LB	Gap (%)	T_{top}	BP	Süre	
1	10	3	34206094	34206094	0	20	35574338	15	4
2	10	5	30952678	30952678	0	491	31571732	69	2
3	20	3	33629173	33629173	0	21	35646923	13	6
4	20	5	30369203	30369203	0	614	31887663	123	5
5	20	7	28946839	28946839	0	2498	29236307	256	1
6	30	3	32723873	32723873	0	220	34687305	125	6
7	30	5	29733207	29733207	0	2723	30922535	487	4
8	30	7	28294027	28168131	0.44	18000	29991669	675	6
9	40	3	32723873	32723873	0	163	34687305	74	6
10	40	5	29733207	29672204	0.21	18000	30922535	769	4

11	40	7	28294027	28093627	0.71	18000	28576967	879	1
----	----	---	----------	----------	------	-------	----------	-----	---

Tablo 16. AYÇMATHP1-Benders algoritmasının hesaplama sonuçları

Pr. Id.	AYÇMATHP1-Benders					
	H	p	BP	LB	Gap (%)	T_{top}
1	10	3	34548155	33864033	2.0	356
2	10	5	31571732	30333624	3.9	876
3	20	3	34133611	33292881	2.5	259
4	20	5	30642526	29458127	3.9	978
5	20	7	28952628	28802105	0.5	3567
6	30	3	33705589	32298463	4.2	2487
7	30	5	30773869	29138543	5.3	3678
8	30	7	28576967	27886450	2.4	8764
9	40	3	33378350	32363910	3.0	895
10	40	5	30208938	28782038	4.7	6856
11	40	7	29425788	27672223	6.0	9346

4.10 p-Hub Ortanca Kesme/Önleme Problemi

p-Hub ortanca kesme/önleme problemi kapsamında geliştirilen algoritmanın test edilmesi için, TR81 veri setine ilave olarak CAB25 veri seti kullanılmıştır. CAB25 ve TR81 veri seti ile elde edilen çözüm sonuçları, sırasıyla, **Tablo 17** ve **Tablo 18**'de sunulmuştur. Tablolarda, $|T|$, engelleyicinin bütçe kümesini; SÜ, serim kullanıcısının son ana dağıtım üslerini; Artış, yüzde olarak engelleme sonrası ek maliyeti ifade etmektedir. Elde edilen sonuçlar, önerilen algoritmanın ve yaklaşımın, literatürdeki çalışmalara göre, hem daha doğru hem de daha büyük çaplı problemler için çözüm üretilebildiğini göstermiştir.

Tablolarda görüldüğü üzere, engelleme bütçesi arttıkça eniyileme kesilerinin arttığı ve dolayısıyla çözüm zamanının arttığı görülmektedir. Daha yüksek engelleme bütçesi, serim engelleyicisinin farklı alternatifleri denemesine olanak tanıdığından iterasyon sayısını da artırmaktadır. ÇMATHKM'in alt problemi, bir p-Hub ortanca problemi olan ÇMATHP'dir. Bu nedenle, her iterasyonda bu problemi ayrıca çözmek durumunda kalınmaktadır. İterasyon sayısı arttıkça çözüm zamanları da hızlıca yükselmektedir. Azaltım faktörü arttıkça iterasyon sayısı azalmakta fakat çözüm süresi artmaktadır. Bunun sebebi, alt problemin çözüm zamanının, daha düşük azaltım faktörlerine göre artmasıdır.

Tablo 17. ÇMATHKM-Ayrıştırma algoritmasının CAB25 veri seti için hesaplama sonuçları

p=5							
α	Engellenen Hub Dğümleri	Seçilen Üsler	Engelleme öncesi seçilen Üsler	Toplam Maliyet	Artış (%)	Kesi Sayısı	Zaman (s)
 T : 1							
0.3	4	17, 7, 9, 12, 14	17, 4, 7, 12, 14	5431050615	5,20	6	154
0.5	12	17, 4, 22, 7, 14	17, 4, 7, 12, 14	6572490579	3,57	5	175
0.7	12	17, 4, 22, 7, 14	17, 4, 7, 24, 12	7594774146	3,40	4	224
0.9	4	17, 7, 9, 12, 14	1, 17, 4, 7, 12	8269177006	2,00	4	426
 T : 2							
0.3	22, 12	17, 19, 4, 7, 14	17, 4, 7, 12, 14	5628785655	9,03	16	319
0.5	4, 12	17, 21, 6, 22, 14	17, 4, 7, 12, 14	6796520995	7,11	13	480
0.7	4, 12	17, 19, 21, 6, 14	17, 4, 7, 24, 12	7792435814	5,78	8	471
0.9	4, 12	1, 17, 22, 9, 11	1, 17, 4, 7, 12	8370050507	3,25	11	870
 T : 3							
0.3	19, 22, 12	17, 4, 7, 8, 14	17, 4, 7, 12, 14	6113339174	18,41	37	671
0.5	19, 22, 12	17, 4, 7, 8, 14	17, 4, 7, 12, 14	7068125636	11,39	33	953
0.7	19, 22, 12	17, 4, 7, 8, 24	17, 4, 7, 24, 12	7879035950	7,28	26	1139
0.9	19, 22, 12	1, 17, 4, 7, 8	1, 17, 4, 7, 12	8496303481	4,80	25	1581
 T : 4							
0.3	19,22,8, 12	17, 4, 7, 23, 14	17, 4, 7, 12, 14	6442670758	24,79	69	1121
0.5	19,22,8, 12	17, 4, 7, 23, 14	17, 4, 7, 12, 14	7428850136	17,07	63	1608
0.7	19,22,8, 12	17, 4, 7, 23, 24	17, 4, 7, 24, 12	8222315559	11,95	51	1982
0.9	19,22,8, 12	1, 17, 4, 7, 23	1, 17, 4, 7, 12	8652536352	6,73	40	1682

Tablo 18. ÇMATHKM-Ayrıştırma algoritmasının TR81 veri seti için hesaplama sonuçları

p	T	α	Zaman (s)	Kesi Sayısı	Seçilen Üsler	Engellenen Üsler
5	3	0.50	1183	33	65, 51, 57, 43, 12	50, 19, 68
5	4	0.50	2032	64	65, 70, 57, 43, 12	50, 19, 51, 68
7	3	0.50	1669	47	50, 36, 23, 39, 56, 57, 43	19, 27, 59
7	4	0.50	3816	126	36, 68, 23, 39, 56, 57, 43	50, 19, 27, 59
7	5	0.70	8279	262	16, 20, 36, 68, 23, 56, 57	50, 19, 27, 43, 59
7	5	0.50	11771	258	64, 65, 51, 71, 57, 59, 12	50, 19, 68, 27, 43
8	3	0.50	2479	71	80, 50, 36, 23, 39, 56, 57, 43	19, 27, 59
8	5	0.50	12722	399	16, 80, 20, 36, 68, 23, 56, 57	50, 19, 27, 43, 59

5. TARTIŞMA/SONUÇ

Tesis yeri seçim problemleri, akademik çalışmaların yoğun olarak yürütüldüğü alanlardan biridir. Ancak, bazı araştırmacılar tarafından, tesis yeri seçim modellerinin gerçek hayat uygulamalarını temsil etme ve çözmedeki yeterliliği uzun süredir sorgulanmakta ve yeni modellerin geliştirilmesine ihtiyaç olduğu ifade edilmektedir. Literatürdeki modellerin büyük bir çoğunluğu, modellerin gerçek hayattaki uygulama alanlarını sınırlandıran belirli varsayımlara dayanmaktadır. Bu varsayımların en önemlilerinden biri, modellerde girdi olarak kullanılan serim ve veri yapısıyla ilgilidir. Literatürdeki modeller, düğümler arası mesafe matrisinde en kısa yol uzunluklarının kullanıldığı tam serim (complete network) yapısı üzerine kuruludur. Modellerde tam serim yapısının kullanılması, gerçek hayattaki serimlerin (örneğin, demiryolları ya da karayolları) tam serim yapısında olmasından ziyade, araştırmacıların bazen doğrudan bazen de dolaylı olarak kabul ettiği bir varsayıma dayanmaktadır. Araştırmacılar, gerçek hayat serimlerine en kısa yol algoritmalarının uygulanması suretiyle, düğümler arasında en kısa yolların kullanıldığı bir tam serim yapısının oluşturulduğunu

varsaymaktadır. Diğer bir ifadeyle, modellerde girdi olarak kullanılan serim yapısı, düğümler arası mesafelerin üçgen eşitsizliğini sağladığı tam serimdir. Bu yaklaşım genel olarak kabul görmeye beraber, gerçek serim ve veri yapısının modellerde doğrudan girdi olarak kullanılmaması, modelleme ve çözüm açısından bazı dezavantajlara sebep olmaktadır. Daha da önemlisi, gerçek hayatta en kısa yolların tercih edilmediği veya üçgen eşitsizliğinin sağlanmadığı birçok durum vardır ve literatürdeki modeller, bu durumlarda doğru çözüm üretememektedir. Söz konusu tespitlerden hareketle, proje kapsamında, literatürdeki yaklaşımlardan tamamen farklı olarak, tam olmayan gerçek serim yapısının modellerde doğrudan girdi olarak kullanıldığı tesis yeri seçim problemleri tanımlanmış, modellenmiş ve çözülmüştür.

Çalışmada, tesis yeri seçiminde klasikler arasında kabul edilmeleri ve diğer tesis yeri seçim modellerinin temelini oluşturmaları nedeniyle, *p-ortanca* ve *p-hub ortanca* problemlerinin aşağıdaki versiyonları ele alınmıştır.

- Kapasitesiz *p-Ortanca* Problemi
- Ayrıtlı Kapasiteli *p-Ortanca* Problemi
- Düğüm Kapasiteli *p-Ortanca* Problemi
- Karma (Ayrıtlı/Düğüm) Kapasiteli *p-Ortanca* Problemi
- Kapasitesiz *p-Hub Ortanca* Problemi
- Ayrıtlı Kapasiteli *p-Hub Ortanca* Problemi
- Düğüm Kapasiteli *p-Hub Ortanca* Problemi
- Karma (Ayrıtlı/Düğüm) Kapasiteli *p-Hub Ortanca* Problemi
- Ağaç Yapılı *p-Hub Ortanca* Problemi
- *p-Hub Ortanca* Kesme/Önleme Problemi

Anılan problemler için, literatürde ilk kez, belirli maliyet ve serim yapısı gerektirmeyen matematiksel modeller geliştirilmiştir. Geliştirilen matematiksel modeller, (üçgen eşitsizliğini sağlamayan dahil) tam ve tam olmayan tüm serim yapılarında doğru sonuçlar üretmektedir. Önerilen modelleme yaklaşımı, mevcut yaklaşımlar ile ele alınamayan çeşitli hususların ilk kez modellenmesini veya mevcut modelleme yaklaşımlarında basitleştirilerek ele alınan hususların daha gerçekçi bir şekilde modellenmesini mümkün hale getirmiştir. Örneğin, karayolları ve demiryolları gibi gerçek serim yapıları üzerinde tanımlı ayrıtlı kapasiteleri için ayrıtlı ve karma kapasiteli *p-ortanca* ve *p-hub ortanca* modelleri ilk kez geliştirilmiştir. Aynı şekilde, mevcut durumda genelde tüm ayrıtlar için aynı kabul edilen ulaştırma maliyetlerinin, tüm ayrıtlar için farklılaştırılmasına olanak sağlanmıştır. Özetle, proje kapsamında tanımlanan problemler ve önerilen modeller özgündür. Nitekim, uluslararası dergilere gönderilen makalelere hakemler tarafından yapılan yorumlarda da, önerilen yaklaşımın ulaştırma sistemlerinin daha gerçekçi modellenmesini sağladığı ifade edilmiştir.



Proje kapsamında geliştirilen p-ortanca ve p-hub ortanca modelleri, ilk olarak CPLEX kullanılarak çözülmüş ve kabul edilebilir süreler içinde iyi çözümler bulunabilmiştir. Ayrıca, çözüm zamanlarını kısaltmak ve daha iyi çözümler elde edebilmek için, Benders ayrıştırma, Lagrange gevşetmesi ve sezgisel algoritmalar geliştirilmiştir. Yapılan hesaplama testleri, önerilen çözüm yaklaşımlarının da genel olarak iyi sonuçlar verdiğini göstermiştir. Hesaplama testleri, modellerde tam olmayan serim yapısının kullanılmasının, gerçek hayat sistemlerinin modellenmesinde sağladığı esneklik yanında, çözüm açısından da çeşitli avantajları olduğunu ortaya koymuştur.

Projede elde edilen sonuçlar bir bütün olarak ele alındığında, literatüre önemli bir katkı yapıldığı, geliştirilen modellerin ve çözüm yöntemlerinin özgün olduğu, modeller ve çözüm yöntemlerini esas alan akademik yayınların öncü niteliği taşıdığı ve yaygın etki potansiyelinin yüksek olduğu değerlendirilmektedir.

Projede yapılan çalışmalar, yurtiçi ve yurtdışında konferans ve çalıştaylarda sunulmuş, olumlu geribildirimler alınmıştır. p-hub ortanca önleme/kesme problemine ilişkin bir yüksek lisans tez çalışması tamamlanmıştır (Ek-1). Ağaç yapılı p-hub ortanca ve kapasiteli p-hub ortanca problemlerini esas alan doktora tez çalışması devam etmektedir. Kapasitesiz p-hub ortanca problem, kapasitesiz ve düğüm kapasiteli p-ortanca problemlerini içeren makaleler, SCI indeksli dergilere gönderilmiştir (Ek-2). Projenin diğer bölümlerine ilişkin makale yazım çalışmalarına halen devam edilmektedir. Çalışma kapsamında, aşağıdaki konferanslarda bildiriler sunulmuştur.

- Akgün, İ. "Arc-Capacitated p-Median Problem", INFORMS Annual Meeting, Nashville, ABD, 13-16 Kasım 2016.
- Benli, A., Akgün, İ. "Akış Tabanlı p-Ortanca Önleme Problemi", Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği Kongresi, İzmir, 5-7 Temmuz 2017.
- Benli A., Akgün İ., "p-Hub Ortanca Önleme Problemi", Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği Kongresi, Ankara, 9-11 Eylül 2015.
- Şahin R., Akgün İ., "Ayrıt Kapasiteli p-Ortanca Problemi", Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği Kongresi, Ankara, 9-11 Eylül 2015.
- Kayışoğlu B., Akgün İ., "Kapasitesiz Ağaç-Hub p-Ortanca Problemi İçin Yeni Bir Model", Yöneylem Araştırması ve Endüstri Mühendisliği Kongresi, Ankara, 9-11 Eylül 2015.



GCCRIS



KAYNAKLAR

Ahmadi, S. and I.H. Osman (2005), Greedy Random Adaptive Memory Programming Search for the Capacitated Clustering Problem,” *European Journal of Operational Research* **162**, 30-44.

Akgün, İ., Tansel, B. 2010. “Min-Degree Constrained Minimum Spanning Problem: A New Formulation via Miller-Tucker-Zemlin Constraints”, *Computers and Operations Research* 37 (1), 72-82.

Alamur, S., Kara, B.Y. 2008. “Network hub location problems: The state of the art”, *European Journal of Operational Research* 190, 1-21, (2008).

Alumur, S., Kara, B.Y., Karasan, O.E. The design of single allocation incomplete hub networks. *Transportation Research Part B* 43, 936-951, 2009.

Avella, P., Sassano, A. 2001. “On the p-median polytope”, *Mathematical Programming* 89, 395–411.

Avella, P., Sassano, A., Vasil'ev, I. 2007. “Computational study of large-scale p-median problems”, *Mathematical Programming* 109(1), 89-114.

Aykin, T. 1995. “Networking policies for hub-and-spoke systems with application to the air transportation system”, *Transportation Science* 29, 201-221.

Baldacci R, Hadjiconstantinou E, Maniezzo V, Mingozzi A. A new method for solving capacitated location problems based on set partitioning approach. *Computers and Operations Research* 2002; 29: 365-386.

Balinski, M.L. 1961. “Fixed cost transportation problems”, *Naval Research Logistics Quarterly* 8, 41-54.

Balinski, M.L. 1965. “Integer programming: Methods, uses and computation”, *Management Science* 12, 253-313.

Beasley, J.E. 1985. “A note on solving large p-median problems”, *European Journal of Operational Research* 21, 270-273.

Benders, J. F. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems, *Numerische Mathematik* 4(3), 238–252, 1962.

Benkoczi, R., Bhattacharya, B.K. 2005. “A new template for solving p-median problems for trees in sub-quadratic time”. *Lecture Notes in Computer Science* 3669, Editörler: Brodal, G.S., Leonardi, S., Springer Berlin, Heidelberg.

Boffey, T.B., Karkazis, J. 1984. “p-medians and multi-medians”, *Journal of the Operational Research Society* 35, 57-64.

Bozkaya B, Erkut E, Laporte G. A tabu search heuristic and adaptive memory procedure for political districting. *European Journal of Operational Research* 2003; 144: 12-26.

Bradley, P.S., Mangasarian, O.L. 1998. “Feature selection via concave minimization and support vector machines”, *Proceedings of the Fifteenth International Conference on Machine Learning*, 82-90.

Briant, O., Naddef, D. 2004. “The optimal diversity management problem”, *Operations Research* 52(4), 515-526.

Calik, H., Alumur, S., Kara, B.Y., Karasan, O.E. A tabu-search based heuristic for the hub covering problem over incomplete hub networks. *Computers and Operations Research* 36, 3088–3096, 2009.



- Campbell, J.F. 1994. "Integer programming formulations of discrete hub location problems", *European Journal of Operational Research* 72, 387-405.
- Campbell, J.F. 1996. "Hub location and p-hub median problem", *Operations Research* 44, 923-935.
- Campbell, J.F. and O'Kelly, M.E. Twenty-Five Years of Hub Location Research, *Transportation Science* 46, 153–169, 2012.
- Campbell, J.F. Designing Hub Networks with Connected and Isolated Hubs. *HICSS Proceedings*, 1-10, 2010.
- Campbell, J.F. Location and allocation for distribution systems with transshipments and transportation economies of scale. *Annals of Operations Research* 40, 77–99, 1992.
- Campbell, J.F. Modeling economies of scale in transportation hub networks, 46th Annual Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS) Proceedings, 1154-1163, 2013.
- Campbell, J.F., Ernst, A. and Krishnamoorthy, M. Hub Arc Location Problems: Part I - Introduction and Results, *Management Science* 51, 1540–1555, 2005.
- Campbell, J.F., Ernst, A. and Krishnamoorthy, M. Hub Arc Location Problems: Part II - Formulations and Optimal Algorithms, *Management Science* 51, 1556–1571, 2005.
- Ceselli A, Righini G. A Branch-and-Price algorithm for the capacitated p-median problem. *Networks* 2005; 45: 125-142.
- Ceselli A, Righini G. A Branch-and-Price algorithm for the capacitated p-median problem. *Networks* 2005; 45: 125-142.
- Chaves AA, Correa FA, Lorena LAN. Clustering search heuristic for the capacitated p-median problem. *Innovations in Hybrid Intelligent Systems* 2008; 44: 136-143.
- Christofides, N., Beasley, J.E. 1994. "A tree search algorithm for the p-median problem", *European Journal of Operational Research* 10, 196-204.
- Church, R.L. 2003. COBRA: a new formulation of the classic p-median location problem, *Annals of Operations Research* 122, 103–120.
- Church, R.L. 2008. "BEAMR: An exact and approximate model for the p-median problem", *Computers and Operations Research* 35(2), 417-426.
- Contreras, I., Fernández, E., & Marín, A., 2009. "Tight bounds from a path based formulation for the tree of hub location problem", *Computers & Operations Research*, 36(12), 3117–3127. doi:10.1016/j.cor.2008.12.009
- Contreras, I., Fernández, E., and Marín, A. The Tree of Hubs Location Problem, *European Journal of Operational Research* 202(2), 390–400, 2010.
- Contreras, I. Hub Location Problems. In G.Laporte, S.Nickel, and F.Saldanhada Gama, Editors, *Location Science*, 311-344, Springer, 2015.
- Contreras. I., Fernandez. E., Marin. A., 2010. The tree-of-hubs location problem: A comparison of formulations. *European Journal of Operational Research* 202 (2010) 390–400
- Cornuejols, G., Nemhauser, G.L., Wolsey, L.A. 1980. "A canonical representation of simple plant location problems and its applications", *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 1(3), 261–272.



Correa ES, Steiner MTA, Freites AA, Carnieri C. A genetic algorithm for solving a capacitated p-median problem: Theory and practice in optimization. In Martnez JM, Yuan J. (eds.), Numerical Algorithms 35, 2004: 373-388.

Daskin MS. Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications, J. Wiley and Sons, Inc., New York; 1995.

Daskin, M.S., Owen, S.H. 2003. "Location models in transportation". Handbook of Transportation Science, 2nd Edition, Editör: Hall, R.W., Kluwer Academic Publishers, Boston, 311-360.

de Farias, I.R. 2001. "A family of facets for the uncapacitated p-median polytope", Operations Research Letters 28, 161-167.

Diaz JA, Fernandez E. Hybrid scatter search and path relinking for the capacitated p-median problem. European Journal of Operational Research 2006; 169: 570-585.

du Merle, O., Vial, J.P. 2002. "Proximal-ACCPM, a cutting plane method for column generation and Lagrangian relaxation: application to the p-median problem", Technical Report, Logilab, HEC, University of Geneva.

du Merle, O., Villeneuve, D., Desrosiers, J., Hansen, P. 1999. "Stabilized Column Generation", Discrete Mathematics 194, 229-237.

Elloumi, S. 2010. "A tighter formulation of the p-median problem", Journal of Combinatorial Optimization 19(1), 69-83.

Erlenkotter, D. 1978. "A dual-based procedure for uncapacitated facility location", Operations Research 26, 992-1009.

Ernst A., Krishnamoorthy, M. 1998. "Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem", European Journal of Operational Research 104, 100-112.

Ernst, A.T., Krishnamoorthy, M., Exact and heuristic algorithms for the uncapacitated multiple allocation p-hub median problem. European Journal of Operational Research 104, 100-112, 1998.

Farahani R.Z., Hekmatfar, M., Arabani, A.B., Nikbakhsh E. 2013. "Hub Location problems: A review of models, classification, solution techniques, and applications", Computers and Industrial Engineering 64 (4), 1096-1109.

Fleszar K, Hindi KS. An effective VNS for the capacitated p-median problem. European Journal of Operational Research 2008; 191: 612-622.

Floyd, R.W. 1962. "Algorithm 97: shortest path", Communications of the Association for Computing Machinery 5(6), 345.

Floyd, R.W. Algorithm 97: Shortest Path, Communications of the Association for Computing Machinery 5(6), 345, 1962.

França PM, Sosa NM, Pureza V. An adaptive tabu search algorithm for the capacitated p-median problem. International Transactions in Operations 1999; 6: 665-678.

Fung, G., Mangasarian, O.L. 2001. "Semi-supervised support vector machines for unlabeled data classification", Optimization Methods and Software 15, 29-44.

Galvão, R.D. 1980. "A dual-bounded algorithm for the p-median problem", Operations Research 28, 1112-1121.



Galvão, R.D., Raggi, L.A. 1989. "A method for solving to optimality uncapacitated location problems", *Annals of Operations Research* 18, 225-244.

Garey MR, Johnson DS. *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*. W.H. Freeman, San Francisco; 1979.

Garfinkel, R.S., Neebe, A.W., Rao, M.R. 1974. "An algorithm for the M-median plant location problem", *Transportation Science* 8, 217-236.

Ghoseiri K, Ghannadpour SF. An efficient heuristic method for capacitated p-median problem. *International Journal of Management Science Engineering Management* 2009; 4: 72-80.

Golden B, Skiscim C. Using simulated annealing to solve routing and location problems. *Naval Research Logistics Quarterly* 1986; 33: 261-279.

Hakimi, S. 1964. "Optimum location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph", *Operations Research* 12, 450-459.

Hakimi, S. 1965. "Optimum location of switching centers in a communications network and some related graph theoretic problems", *Operations Research* 13, 462-475.

Hansen P, Jaumard B. Cluster analysis and mathematical programming. *Mathematical Programming* 1997: 79: 191-215.

Hansen, P., Jaumard, B. 1997. "Cluster analysis and mathematical programming", *Mathematical Programming* 79, 191-215.

Hansen, P., Mladenovic, N. 1997. "Variable neighbourhood search for the p-median", *Location Science* 5, 207-226.

Jarvinen, P., Rajala, J., Sinervo, H. 1972. "A branch-and-bound algorithm for seeking the p-median", *Operations Research* 20, 173-182.

Kariv, O., Hakimi, S.L. 1979. "An algorithmic approach to network location problems. II: the p-medians", *SIAM Journal of Applied Mathematics* 37, 539-560.

Klein K, Aronson JE. Optimal clustering: A model and method. *Naval Research Logistics* 1991; 38: 447-461.

Klincewicz, J.G. 1994. "Dual algorithms for the uncapacitated hub location problem and the p-hub median problem", AT&T Bell Laboratories, Holmdel, NJ 07 733.

Koskosidis YA, Powell WR. Clustering algorithms for consolidation of customer orders into vehicle shipments. *Transportation Research B* 1992; 26: 365-379.

Lorena LAN, Senne ELF. A Column generation approach to capacitated p-median problem. *Computers and Operations Research* 2004; 31: 863-876.

Lorena LAN, Senne ELF. Local search heuristics for capacitated p-median problems. *Networks and Spatial Economics* 2003; 3: 407-419.

Maniezzo V, Mingozzi A, Baldacci R. A bionomic approach to the capacitated p-median problem. *Journal of Heuristics* 1998; 4: 263-280.

Marin, A., Canovas, L., Landete, M. 2006. "New formulations for the uncapacitated multiple allocation hub location problem", *European Journal of Operational Research* 172, 274-292.

Marin, A., Canovas, L., Landete, M. New formulations for the uncapacitated multiple allocation hub



location problem. *European Journal of Operational Research* 172 (1), 274-292, 2006.

Martins de Sá, E., Contreras, I., Cordeau, J. Exact and Heuristic Algorithms for the Design of Hub Networks with Multiple Lines. *European Journal of Operational Research* 246, 186–198, 2015.

Martins de Sá, E., Contreras, I., Cordeau, J.-F., Saraiva de Camargo, R., de Miranda, G. The Hub Line Location Problem. *Transportation Science* 49 (3), 500–518, 2015.

Martins de Sá, E., de Camargo, R.S., de Miranda, R. An Improved Benders Decomposition Algorithm for the Tree of Hubs Location Problem. *European Journal of Operational Research* 226, 185–202, 2013.

Melo M.T., Nickel S., Saldanha-da-Gama, F. 2009. "Facility location and supply chain management – A review", *European Journal of Operational Research* 196, 401-412.

Miller, C. E.; Tucker, E. W.; Zemlin, R. A., "Integer Programming Formulations and Travelling Salesman Problems". *J. ACM* 7: 326–329, 1960

Minoux, M. 1987. "A class of combinatorial problems with polynomially solvable large scale set covering/set partitioning relaxations", *RAIRO* 21, 105-136.

Mirchandani, P.B., Wong, R.T., Oudjit, A., 1985. "Multidimensional extensions and a nested dual approach for the m-median problem", *European Journal of Operational Research* 21, 121-137.

Mirzaian A. Lagrangean heuristic for the star-star concentrator location problem: Approximation algorithms and bounds. *Networks* 1985; 15: 1-20.

Mladenovic, N., Brimberg, J., Hansen, P., Moreno-Pérez, J.A. 2007. "The p-median problem. A survey of metaheuristic approaches", *European Journal of Operational Research* 179(3), 927-939.

Mulvey JM, Beck MP. Solving capacitated clustering problems. *European Journal of Operational Research* 1984; 18: 339-348.

Mulvey, J.M., Crowder, H.P. 1979. "Cluster analysis: An application of Lagrangian relaxation", *Management Science* 25(4), 340–392.

Narula, S.C., Ogbu, U.I., Samuelsson, H.M. 1977. "An algorithm for the p-median problem", *Operations Research* 25, 709-713.

Nishizeki, T., Chiba, N., 1998. *Planar graphs: theory and algorithms*, Annals of Discrete Mathematics 32, Elsevier.

O'Kelly, M.E., Bryan, D. Hub location with wlow economies of scale, *Transportation Research Part B* 32, 605-616, 1998.

Osman IH, Ahmadi S. Guided construction search metaheuristics for the capacitated p-median Problem with single source constraints. *Journal of the Operational Research Society* 2006; 1-15.

Osman IH, Christofides N. Capacitated clustering problems by hybrid simulated annealing and tabu search. *International Transactions in Operational Research* 1994: 1: 317-336.

Pirkul H. Efficient algorithms for the capacitated concentrator location problem. *Computers and Operations Research* 1987; 14: 197-208.

Pitakaso R, Sindhuchao S. GRASP with iterated local search heuristic for capacitated p-median problem. *Proceedings of the 7th Asia Pacific Industrial Engineering and Management Systems Conference 2006*, Bangkok, Thailand, 514-520.



Reese, J. 2006. Solution methods for the p-median problem: An annotated bibliography. *Networks* 48(3), 125–142.

Resurreccion JZ. An opportunity cost-based genetic algorithm for a modified capacitated p-median problem. *Phillipine Engineering Journal* 2006; 27: 1-26.

ReVelle, C.S., Swain, R. 1970. "Central facilities location", *Geographical Analysis* 2, 30–42.

Ricardo-AEA. Update of the Handbook on External Costs of Transport. Final Report to European Commission, Report Number ED57769, UK, 2014.

Rodney D, Soper A, Walshaw C. Multilevel approaches applied to the capacitated clustering problem. In H. R. Arabnia et al., (eds.), *Proc. 2008 Intl. Conf. Scientific Computing, WorldComp'08, 2008. (CD-ROM)*.

Scaparra, M.P., Church, R.L. 2008. "A bilevel mixed-integer program for critical infrastructure protection planning", *Computers and Operations Research*, 35 (6). 1905-1923.

Schaeffer S. Graph clustering. *Computer Science Review* 2007; 1: 27-64.

Scheuerer S, Wendolsky R. A scatter search heuristic for the capacitated clustering problem. *European Journal of Operational Research* 2006; 169: 533-547.

Senne, E.L.F., Lorena, L.A.N., Pereira, M.A. 2005. "A branch-and-price approach to p-median location problems", *Computers and Operations Research* 32(6), 1655-1664.

Skorin-Kapov, D., Skorin-Kapov, J., O'Kelly, M. 1996. "Tight linear programming relaxations of uncapacitated p-hub median problems", *European Journal of Operational Research* 94, 582-593.

T. L. Lei, "Identifying Critical Facilities in Hub-and-Spoke Networks: A Hub Interdiction Median Problem," *Geogr. Anal.*, vol. 45, no. 2, pp. 105–122, Apr. 2013.

Taillard, E.D. 1996. "Heuristic methods for large centroid clustering problems", Technical Report IDSIA 96-96.EIVD, University of Applied Sciences of Western Switzerland, Route de Cheseaux 1, CH-1400 Yverdon-les-Bains, (1996), <http://www.eivd.ch/ina/taillard>

Tamir, A. 1996. An $O(pn^2)$ algorithm for the p-median and related problems on tree graphs, *Operations Research Letters* 19(2), 59-64.

Tansel B.Ç., Akgün, İ., 2012. "A new modeling perspective for the p-median problem: Shortest path trees and multicommodity flows", Research Report, Bilkent University, Department of Industrial Engineering, 06800 Bilkent, Ankara, Turkey.

Transportation Research Board. National Cooperative Freight Research Program Report 22: Cost Data Elements. Transportation Research Board of the National Academies, Washington, DC., 2013.

Vinod, H.D. 1969. "Integer programming and theory of grouping", *Journal of the American Statistics Association* 64, 506-519.

Yaman, H. The hierarchical hub median problem with single assignment. *Transportation Research Part B* 43, 643–658, 2009.

Zhou Z. Three perspectives of Data Mining. *Artificial Intelligence* 2003; 143: 139-146.

**TÜBİTAK
PROJE ÖZET BİLGİ FORMU**

Proje Yürütücüsü:	Doç. Dr. İBRAHİM AKGÜN
Proje No:	114M363
Proje Başlığı:	--Tesis Yeri Seçim Problemleri İçin Akış Tabanlı Modellerin Ve Çözüm Metodolojilerinin Geliştirilmesi --
Proje Türü:	1001 - Araştırma
Proje Süresi:	36
Araştırmacılar:	SELÇUK GÖREN, BAHAR YETİŞ
Danışmanlar:	
Projenin Yürütüldüğü Kuruluş ve Adresi:	ABDULLAH GÜL Ü.
Projenin Başlangıç ve Bitiş Tarihleri:	15/10/2014 - 15/10/2017
Onaylanan Bütçe:	288042.0
Harcanan Bütçe:	96612.62
Öz:	<p>Tesis yeri seçim problemleri, yoğun olarak akademik çalışmaların yürütüldüğü alanlardan biridir. Ancak, bazı araştırmacılar tarafından, tesis yeri seçim modellerinin gerçek hayat uygulamalarını temsil etme ve çözmedeki yeterliliği uzun süredir sorgulanmakta ve yeni modellerin geliştirilmesine ihtiyaç olduğu ifade edilmektedir. Literatürdeki modellerin büyük bir çoğunluğu, modellerin gerçek hayattaki uygulama alanlarını sınırlandıran belirli varsayımlara dayanmaktadır. Bu varsayımların en önemlilerinden biri, modellerde girdi olarak kullanılan serim ve veri yapısıyla ilgilidir. Literatürdeki modeller, düğümler arası mesafe matrisinde en kısa yol uzunluklarının kullanıldığı tam serim (complete network) yapısı üzerine kuruludur. Modellerde tam serim yapısının kullanılması, gerçek hayattaki serimlerin (örneğin, demiryolları ya da karayolları) tam serim yapısında olmasından ziyade, araştırmacıların bazen doğrudan bazen de dolaylı olarak kabul ettiği bir varsayıma dayanmaktadır. Araştırmacılar, gerçek hayat serimlerine en kısa yol algoritmalarının uygulanması suretiyle, düğümler arasında en kısa yolların kullanıldığı bir tam serim yapısının oluşturulduğunu varsaymaktadır. Diğer bir ifadeyle, modellerde girdi olarak kullanılan serim yapısı, düğümler arası mesafelerin üçgen eşitsizliğini sağladığı tam serimdir. Bu yaklaşım genel olarak kabul görmekle beraber, gerçek serim ve veri yapısının modellerde doğrudan girdi olarak kullanılmaması, modelleme ve çözüm açısından bazı dezavantajlara sebep olmaktadır. Daha da önemlisi, gerçek hayatta en kısa yolların tercih edilmediği veya üçgen eşitsizliğinin sağlanmadığı birçok durum vardır. Söz konusu tespitlerden hareketle, literatürdeki yaklaşımlardan tamamen farklı olarak, tam olmayan gerçek serim yapısının modellerde doğrudan girdi olarak kullanıldığı tesis yeri seçim problemleri tanımlanmıştır. Projede, tesis yeri seçiminde klasikler arasında kabul edilmeleri ve diğer tesis yeri seçim modellerinin temelini oluşturmaları nedeniyle, p-ortanca ve p-hub ortanca problemleri ele alınmıştır. Bu problemlerin, ayırıt/düğüm kapasiteli, kapasitesiz, tek ve çoklu atama ile farklı topolojilere izin veren versiyonları için modeller ve çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. Geliştirilen modeller, hem gerçek serim yapısı, hem de (üçgen eşitsizliğini sağlamayan dahil) tam serim yapısı ile doğru sonuçlar vermektedir. Geliştirilen formülasyonlarda, daha çok tesis-talep noktası atama kararlarına dayanan literatürdeki modellerin aksine, ayırıt tabanlı akışlar esas alınmıştır. Modellerin çözümü için, Benders Ayırıştırma ve Lagrange gevşetme algoritmaları geliştirilmiştir. Modellerin ve geliştirilen algoritmaların performansları, çeşitli problemler kullanılarak test edilmiştir.</p>
Anahtar Kelimeler:	p-Ortanca Problemi, p-Hub Ortanca Problemi, Tesis Yeri Seçimi, Tamsayı Programlama
Fikri Ürün Bildirim Formu Sunuldu Mu?:	Hayır